

【 I 】

(1) N (2) V (3) D (4) C (5) B (6) U

【解説】

1.

$$x^{\log_5 x} = 25x$$

5 を底とする対数をとると、

$$\begin{aligned}\log_5 x^{\log_5 x} &= \log_5 25x \\ \Leftrightarrow (\log_5 x)^2 &= \log_5 25 + \log_5 x \\ \Leftrightarrow (\log_5 x)^2 - \log_5 x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log_5 x - 2)(\log_5 x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_5 x &= 2, -1 \\ \Leftrightarrow x &= 25, \frac{1}{5}\end{aligned}$$

となる。

2.

$y = x^3 - ax^2 + x + 4$ と $y = x$ から y を消去すると、

$$\begin{aligned}x^3 - ax^2 + x + 4 &= x \\ \Leftrightarrow x^3 - ax^2 + 4 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。①が相異なる 2 つの実数解を持つような a を求めればよい。

$$f(x) = x^3 - ax^2 + 4$$

とおくと、

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax = x(3x - 2a)$$

である。

[1] $a = 0$ のとき

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0$$

であるから $f(x)$ は単調増加するので、①はただ 1 つの実数解を持ち、不適である。

[2] $a \neq 0$ のとき

$f(x)$ は、 $x = 0, \frac{2}{3}a$ に極値をもつ。

求める条件は、極値が 0 であることと言い換えることができる。ここで、

$$f(0) = 4 \neq 0$$

であるから、求める条件は

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2}{3}a\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{4}{27}a^3 + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^3 &= 27 \\ \Leftrightarrow a &= 3\end{aligned}$$

である。

さらに、 $a = 3$ のとき、①は

$$\begin{aligned}x^3 - 3x^2 + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2 &= 0 \\ x &= -1, 2\end{aligned}$$

となるので、 $x > 0$ の範囲で $x = 2$ のとき共有点を持つ。

3.

$y = \frac{x^2}{2}$ を微分すると $y' = x$ であるから、 $x = t$ における C_1 の接線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= t(x-t) + \frac{t^2}{2} \\ \Leftrightarrow y &= tx - \frac{t^2}{2}\end{aligned}$$

と表される。これが C_2 にも接するとき、

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2} - 2x + 4 &= tx - \frac{t^2}{2} \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(t+2)x + t^2 + 8 &= 0\end{aligned}$$

が重解を持つ。この判別式を D とすると、求める条件は

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (t+2)^2 - (t^2 + 8) = 0 \\ \Leftrightarrow 4t - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 1\end{aligned}$$

である。よって、共通接線 ℓ の方程式は

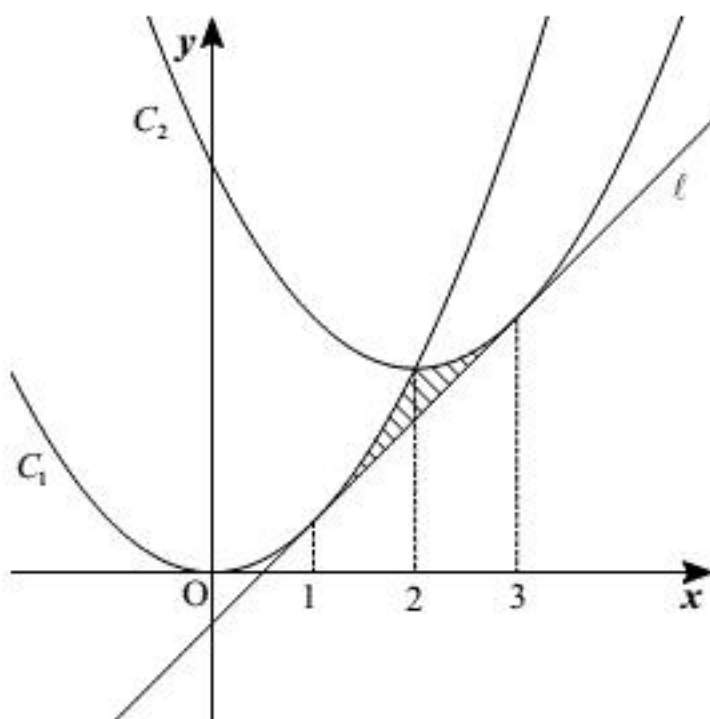
$$y = x - \frac{1}{2}$$

であり、その傾きは 1 である。

さらに、 ℓ と C_2 の接点の x 座標は

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 4\right)' &= 1 \\ \Leftrightarrow x - 2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 3\end{aligned}$$

である。よって、 C_1, C_2, ℓ で囲まれた領域は次図斜線部のようになる。



これより、求める面積は、

$$\begin{aligned}&\int_1^2 \left\{ \frac{x^2}{2} - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right\} dx + \int_2^3 \left\{ \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 4 \right) - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right\} dx \\ &= \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{2} dx + \int_2^3 \frac{(x-3)^2}{2} dx \\ &= \left[\frac{(x-1)^3}{6} \right]_1^2 + \left[\frac{(x-3)^3}{6} \right]_2^3 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

ア	4	イ	4	ウ	2	エ	2	オ	1	カ	1	キ	2
ク	2	ケ	4	コ	4	サ	2	シ	1	ス	2	セ	1
ソ	2	タ	7	チ	3	ツ	1	テ	0	ト	2	ナ	7
ニ	1	ヌ	4	ネ	2	ノ	7						

〔解説〕

P, Q, ℓ の位置関係から

$$2t^3 > 2t + b \quad \dots\dots ①$$

$$4t^2 - 8 < -4 + b \quad \dots\dots ②$$

であるから、これらを合わせて、 b の範囲は

$$4t^2 - 4 < b < 2t^3 - 2t$$

となる。この不等式が成り立つために、 t は

$$2t^3 - 2t - (4t^2 - 4) > 0$$

を満たさなければならない。よって t の範囲は、 $-2 \leq t \leq 2$ に注意して

$$\begin{aligned} & 2t^3 - 2t - (4t^2 - 4) \\ &= 2(t^3 - 2t^2 - t + 2) \\ &= 2(t+1)(t-1)(t-2) > 0 \\ &\therefore -1 < t < 1 \end{aligned}$$

でなければならない。

また、点と直線の距離の公式より

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} |2t^3 - 2t - b| \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} |4t^2 - 4 - b| \end{aligned}$$

である。ここで、①、②より

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} (2t^3 - 2t - b) \\ \beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (4t^2 - 4 - b) \end{aligned}$$

であるから、 $\alpha = \beta$ のとき

$$(2t^3 - 2t - b) = -(4t^2 - 4 - b)$$

である。従って

$$b = t^3 + 2t^2 - t - 2 = (t+2)(t^2 - 1)$$

である。この b の値を α, β に代入して

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} (t^3 - 2t^2 - t + 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (t-2)(t^2 - 1)$$

となる。ここで $f(t) = t^3 - 2t^2 - t + 2$ とおくと

$$f'(t) = 3t^2 - 4t - 1$$

であるから、 $f(t)$ についての増減表を書くと

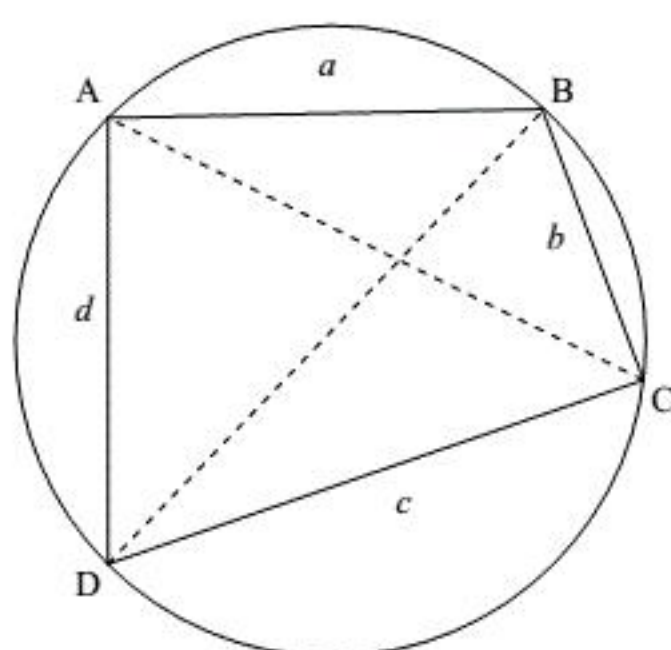
t	-1	...	$\frac{2-\sqrt{7}}{3}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗		↘	

より、 $t = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ のときに最大値

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right) \\ &= \frac{10\sqrt{2} + 7\sqrt{14}}{27} \end{aligned}$$

をとる。

〔Ⅲ〕



1.

[1] $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ のとき

4 角形 ABCD は円に内接しているので、

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

である。△ABC および△ADC において余弦定理より、

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle B = c^2 + d^2 - 2cd \cos \angle D$$

$$\Leftrightarrow ab \cos \angle B = cd \cos (180^\circ - \angle B)$$

$$\Leftrightarrow ab \cos \angle B = -cd \cos \angle B$$

$$\Leftrightarrow (ab + cd) \cos \angle B = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle B = 0 \quad (\because ab + cd > 0)$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ, \angle D = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

であるから、

$$\angle B = \angle D$$

が成り立つ。

[2] $\angle B = \angle D$ のとき

$$\angle B + \angle D = 180^\circ \text{ より}$$

$$\angle B = \angle D = 90^\circ$$

であるから、△ABC および△ADC において三平方の定理より、

$$AC^2 = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

が成り立つ。

以上[1], [2]より、 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ であるための必要十分条件は $\angle B = \angle D$ であることが示された。

(証明終)

2.

4 角形 ABCD は円に内接しているので、

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

である。したがって、

$$\cos(\angle A - \angle C) = \cos\{\angle A - (180^\circ - \angle A)\}$$

$$= \cos(2\angle A - 180^\circ)$$

$$= -\cos 2\angle A$$

$$= 1 - 2\cos^2 \angle A$$

である。ここで、△ABD、△BCD においてそれぞれ余弦定理より

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \angle A$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{4}{9} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2}{3} \cos \angle A$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{9} \cos \angle A,$$

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle C$$

$$= \frac{7}{9} + \frac{5}{9} - 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \cos \angle C$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{35}}{9} \cos \angle A \quad (\because \cos \angle C = -\cos \angle A)$$

となる。したがって、

$$\frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{9} \cos \angle A = \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{35}}{9} \cos \angle A$$

$$\therefore \cos \angle A = -\frac{\sqrt{35} - 2\sqrt{2}}{9}$$

であるから、

$$\cos(\angle A - \angle C) = 1 - 2\cos^2 \angle A$$

$$= 1 - 2 \frac{43 - 4\sqrt{70}}{81}$$

$$= \frac{8\sqrt{70} - 5}{81}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos(\angle A - \angle C) = \frac{8\sqrt{70} - 5}{81}$$