

【1】

(1)

ア 4 イ 2 ウ 4 エ 9

(2)

(a)

オ 1 カ 1 キ 0 ク 8
ケ 5 コ 1 サ 0 シ 8

(b)

ス 1 セ 8 ソ 1
タ 1 チ 0 ツ 1
テ 2 ト 1 ナ 6

(3)

ニ ⑦ ヌ ⑤ ネ ④

【解説】

(1)

点 $P(x, y)$ について

$$x = -\sin \theta + 2 \cos \theta$$

$$y = 2 \sin \theta + 3 \cos \theta$$

と表されるとき、

$$\begin{aligned} OP^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (-\sin \theta + 2 \cos \theta)^2 + (2 \sin \theta + 3 \cos \theta)^2 \\ &= 5 \sin^2 \theta + 13 \cos^2 \theta + 8 \sin \theta \cos \theta \\ &= 4(2 \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) + 5 \\ &= 4\{\cos 2\theta + 1\} + \sin 2\theta + 5 \\ &= 4\sqrt{2} \left(\sin 2\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 9 \\ &= 4\sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) + 9 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(2)

(a)

4つのサイコロを区別して考えると、目の出方は全部で 6^4 通りであり、すべて同様に確からしい。

$10 = 2 \cdot 5$ なので、 $m = 10$ となるようなサイコロの目の組み合わせは $(1, 1, 2, 5)$ のみである。2

の目が出るサイコロと 5 の目が出るサイコロの選び方を考えると、これが実現する確率は、

$$\frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_1}{6^4} = \frac{12}{6^4} = \frac{1}{108}$$

である。

また、 $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ であるから、 $m = 60$ となるようなサイコロの目の組み合わせは $(1, 2, 5, 6)$ 、

$(1, 3, 4, 5)$ 、 $(2, 2, 3, 5)$ である。サイコロの目がこのようになる出方は、それぞれ

$$4! \text{ 通り, } 4! \text{ 通り, } {}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \text{ 通り}$$

であるから、 $m = 60$ となる確率は

$$\frac{4! + 4! + {}_4C_1 \cdot {}_3C_1}{6^4} = \frac{60}{6^4} = \frac{5}{108}$$

となる。

(b)

$10 = 2 \cdot 5$ より、 m と 10 が互いに素になるのは、4つのサイコロを投げて出た目がすべて 1 か 3 で構成されるとき (2, 4, 5, 6 が出ないとき) である。このようになる場合の数は 2^4 通りであるから、求める確率は

$$\frac{2^4}{6^4} = \frac{1}{81}$$

である。

また、 m が 10 の倍数となるのは、5 の目が少なくとも 1 つ出て、かつ、偶数の目 (2, 4, 6) が少なくとも 1 つ出るときである。その余事象は

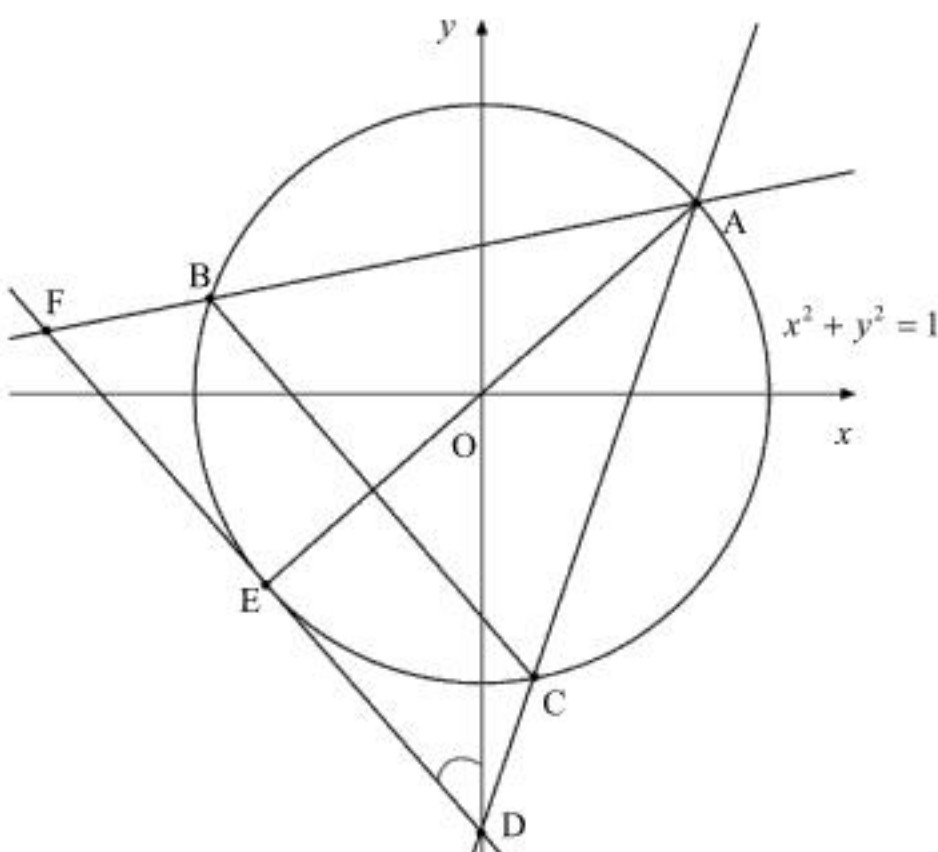
$$\begin{aligned} & (5 \text{ の目が 1 つも出ない}) + (\text{偶数の目が 1 つも出ない}) - (5 \text{ も偶数も出ない}) \\ &= 5^4 + 3^4 - 2^4 \text{ 通り} \end{aligned}$$

存在するので、 m が 10 の倍数となる確率は

$$\frac{6^4 - (5^4 + 3^4 - 2^4)}{6^4} = \frac{606}{6^4} = \frac{101}{216}$$

である。

(3)



直線 AB と DE の交点を F とする。このとき、 $BC \parallel DF$ であるから、 $\triangle AFD$ は $\triangle ABC$ と相似となるので、 $\triangle AFD$ も正三角形であることがわかる。ここで、 $\triangle AED$ に注目することにより、 AE が円の直径であることを用いて、

$$\begin{aligned} DE &= \frac{AE}{\tan(\angle ADE)} \\ &= \frac{2}{\tan 60^\circ} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

と求まる。

次に、 $\triangle OED$ に注目すると、

$$\begin{aligned} \tan(\angle ODE) &= \frac{OE}{DE} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$AE \perp DF$ より、直線 AE の傾きは $\tan(\angle ODE) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ と一致するので、その方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{3}}{2} x \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{\sqrt{3}} y \end{aligned}$$

である。この直線と、円の方程式 $x^2 + y^2 = 1$ から x を消去すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} y \right)^2 + y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow y^2 &= \frac{3}{7} \\ \therefore y &= \pm \sqrt{\frac{3}{7}} \end{aligned}$$

となるが、このうち点 A の y 座標は

$$y = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

である ($y = -\sqrt{\frac{3}{7}}$ は点 E の y 座標)。

〔Ⅱ〕

(1) あ $-1 \leq x \leq 3$

(2) い $-1 + \sqrt{5}, 4$

(3) う $-\frac{11}{2} \leq y \leq 12$

〔解説〕

(1)

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) \leq 0$$

より、この不等式の解は

$$-1 \leq x \leq 3$$

である。

(2)

[1] $-1 \leq x \leq 3$ のとき

このとき、(1)より $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ なので、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1 - (x^2 - 2x - 3) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + 2x - 4) \end{aligned}$$

となる。よって、 $f(x) = 0$ の解は

$$x = -1 \pm \sqrt{5}$$

となるが、このうち $-1 \leq x \leq 3$ を満たすのは

$$x = -1 + \sqrt{5}$$

である。

[2] $x < -1, x > 3$ のとき

このとき、 $x^2 - 2x - 3 > 0$ なので、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1 + (x^2 - 2x - 3) \\ &= \frac{1}{2}(3x + 2)(x - 4) \end{aligned}$$

となる。よって、 $f(x) = 0$ の解は

$$x = -\frac{2}{3}, 4$$

となるが、このうち $x < -1, x > 3$ を満たすのは

$$x = 4$$

である。

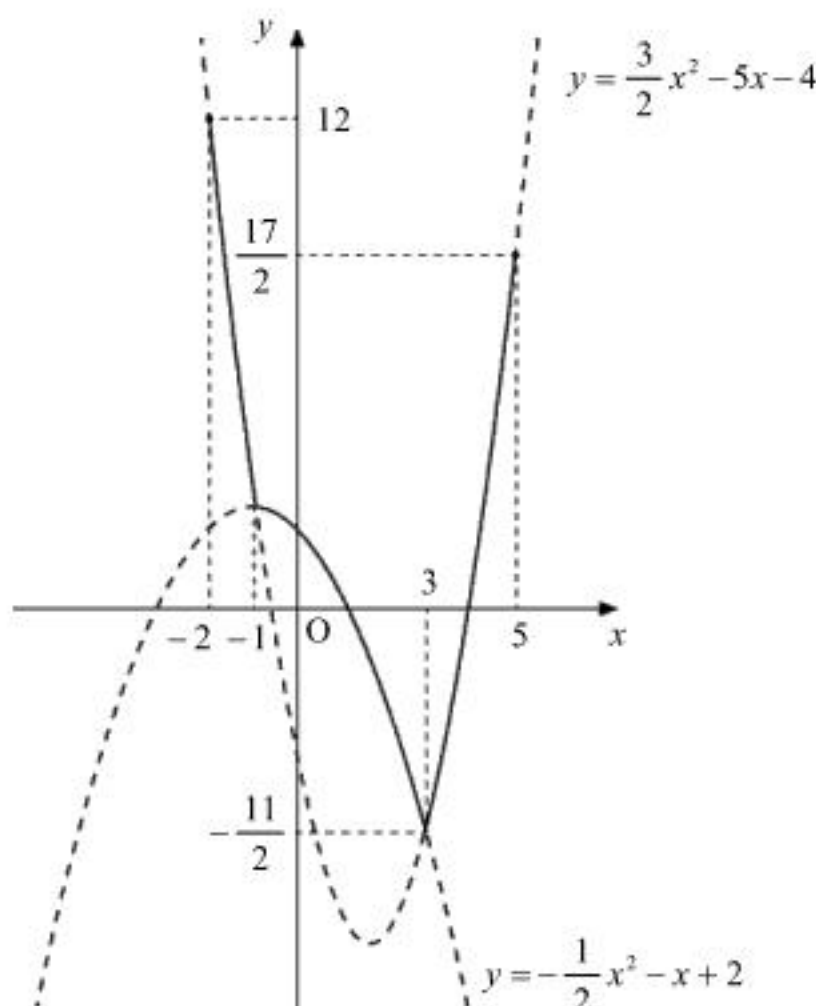
以上[1], [2]より、方程式 $f(x) = 0$ の実数解は

$$x = -1 + \sqrt{5}, 4$$

である。

(3)

$-2 \leq x \leq 5$ における $y = f(x)$ のグラフを描くと下のようになる。



よって、関数 $y = f(x)$ の値域は

$$-\frac{11}{2} \leq y \leq 12$$

である。

【Ⅲ】

(1)

$$\text{え } 1+g \qquad \qquad \qquad \text{お } -g$$

(2)

$$\text{か } 1-g^n \qquad \qquad \qquad \text{き } -g(1-g^{n-1})$$

(3)

$$< \frac{1}{1-g} \qquad \qquad \qquad \text{け } \frac{1}{1-g}$$

(4)

$$\text{こ } g$$

【解説】

(1)

$\overline{\text{OP}}_2$ の成分を計算すると、

$$\begin{aligned} \overline{\text{OP}}_2 &= A \overline{\text{OP}}_1 \\ &= A^2 \overline{\text{OP}}_0 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a^2+bc)x_0 + b(a+d)y_0 \\ c(a+d)x_0 + (bc+d^2)y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。また、点O, P₀, P₁が同一直線上にないことより $\overline{\text{OP}}_0, \overline{\text{OP}}_1$ は一次独立であるから、実数 k, l を用いると

$$\begin{aligned} \overline{\text{OP}}_2 &= k \overline{\text{OP}}_1 + l \overline{\text{OP}}_0 \\ &= k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ka+l)x_0 + kby_0 \\ kcx_0 + (kd+l)y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のようにも表せる。上の2つの $\overline{\text{OP}}_2$ の表式の成分を比較すると、

$$\begin{aligned} k &= a+d=1+g \\ l &= bc-ad=-g \end{aligned}$$

と求まるので、結局

$$\overline{\text{OP}}_2 = (1+g) \overline{\text{OP}}_1 + (-g) \overline{\text{OP}}_0$$

である。

(2)

(1)と同様に考えれば、一般の $n=2, 3, 4, \dots$ に対して

$$\overline{\text{OP}}_n = (1+g) \overline{\text{OP}}_{n-1} + (-g) \overline{\text{OP}}_{n-2}$$

が成り立つことがわかる。これを順次用いて、

$$\begin{aligned} \overline{\text{OP}}_n &= (1+g) \overline{\text{OP}}_{n-1} + (-g) \overline{\text{OP}}_{n-2} \\ &= (1+g) \left\{ (1+g) \overline{\text{OP}}_{n-2} + (-g) \overline{\text{OP}}_{n-3} \right\} + (-g) \overline{\text{OP}}_{n-2} \\ &= (1+g+g^2) \overline{\text{OP}}_{n-2} + (-g)(1+g) \overline{\text{OP}}_{n-3} \\ &= (1+g+g^2+g^3) \overline{\text{OP}}_{n-3} + (-g)(1+g+g^2) \overline{\text{OP}}_{n-4} \end{aligned}$$

のように計算できるので、 $g \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} \overline{\text{OP}}_n &= (1+g+\dots+g^{n-2}+g^{n-1}) \overline{\text{OP}}_1 + (-g)(1+g+\dots+g^{n-3}+g^{n-2}) \overline{\text{OP}}_2 \\ &= \frac{1-g^n}{1-g} \overline{\text{OP}}_1 + \frac{-g(1-g^{n-1})}{1-g} \overline{\text{OP}}_0 \quad \dots (*) \end{aligned}$$

のように表せることが予想できる。

以下、 $n=2, 3, 4, \dots$ に対して(*)が成り立つことを、数学的帰納法により示す。

[1] $n=2$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1-g^2}{1-g} \overline{\text{OP}}_1 + \frac{-g(1-g^{2-1})}{1-g} \overline{\text{OP}}_0 &= (1+g) \overline{\text{OP}}_1 + (-g) \overline{\text{OP}}_0 \\ &= \overline{\text{OP}}_2 \quad (\because (1)) \end{aligned}$$

より、(*)は成り立つ。

[2] $n=3$ のとき

$$\begin{aligned} \overline{\text{OP}}_3 &= (1+g) \overline{\text{OP}}_2 + (-g) \overline{\text{OP}}_1 \\ &= (1+g) \left\{ (1+g) \overline{\text{OP}}_1 + (-g) \overline{\text{OP}}_0 \right\} + (-g) \overline{\text{OP}}_1 \\ &= (1+g+g^2) \overline{\text{OP}}_1 + (-g)(1+g) \overline{\text{OP}}_0 \\ &= \frac{1-g^3}{1-g} \overline{\text{OP}}_1 + \frac{(-g)(1-g^2)}{1-g} \overline{\text{OP}}_0 \end{aligned}$$

より、(*)は成り立つ。

[3] $n=k, k+1$ ($k=2, 3, 4, \dots$) のとき(*)が成り立つことを仮定すると、

$$\begin{aligned} \overline{\text{OP}}_{k+2} &= (1+g) \overline{\text{OP}}_{k+1} + (-g) \overline{\text{OP}}_k \\ &= (1+g) \left\{ \frac{1-g^{k+1}}{1-g} \overline{\text{OP}}_1 + \frac{-g(1-g^k)}{1-g} \overline{\text{OP}}_0 \right\} \\ &\quad + (-g) \left\{ \frac{1-g^k}{1-g} \overline{\text{OP}}_1 + \frac{-g(1-g^{k-1})}{1-g} \overline{\text{OP}}_0 \right\} \\ &= \frac{1-g^{k+2}}{1-g} \overline{\text{OP}}_1 + \frac{-g(1-g^{k+1})}{1-g} \overline{\text{OP}}_0 \end{aligned}$$

より、 $n=k+2$ のときも(*)は成り立つ。

以上[1], [2], [3]より、 $n=2, 3, 4, \dots$ に対して(*)が成り立つことが示された。よって、

$$\overline{\text{OP}}_n = \frac{1-g^n}{1-g} \overline{\text{OP}}_1 + \frac{-g(1-g^{n-1})}{1-g} \overline{\text{OP}}_0 \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

である。

(3)

(2)より

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1-g^n}{1-g} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{-g(1-g^{n-1})}{1-g} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

である。よって $|g| < 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1-g^n}{1-g} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{-g(1-g^{n-1})}{1-g} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{1-g} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{-g}{1-g} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \frac{1}{1-g} x_1 + \frac{-g}{1-g} x_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \frac{1}{1-g} y_1 + \frac{-g}{1-g} y_0 \end{aligned}$$

とわかる。

(4)

点 $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right)$ を P_∞ と書くと、

$$\overline{\text{OP}}_\infty = \frac{1}{1-g} \overline{\text{OP}}_1 + \frac{-g}{1-g} \overline{\text{OP}}_0$$

と表すことができるが、これは、点 P_∞ が線分 P_1P_0 を

$$g:1$$

に外分することを示している。

【Ⅳ】

(1)

$y = \log x$ より

$$y' = \frac{1}{x}$$

であるから、点 $P(t, \log t)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - \log t &= \frac{1}{t}(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{t}x + \log t - 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{t}x + \log t - 1$$

(2)

$$\begin{aligned} y &= ax^2 - b \\ &= a \left(x - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \left(x + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $\alpha = \sqrt{\frac{b}{a}}$ とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \left\{ -a(x - \alpha)(x + \alpha) \right\} dx \\ &= -a \int_{-\alpha}^{\alpha} \left\{ (x + \alpha)^2 - 2\alpha(x + \alpha) \right\} dx \\ &= -a \left[\frac{1}{3}(x + \alpha)^3 - \alpha(x + \alpha)^2 \right]_{-\alpha}^{\alpha} \\ &= -a \left\{ \frac{1}{3}(2\alpha)^3 - \alpha(2\alpha)^2 \right\} \\ &= \frac{4a}{3} \alpha^3 \\ &= \frac{4b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}} \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{4b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}}$$

(3)

まず、曲線 $y = ax^2 - b$ について

$$y' = 2ax$$

である。

2 曲線 $y = \log x$ と $y = ax^2 - b$ は点 $P(t, \log t)$ で接することから、

$$\begin{aligned} \log t &= at^2 - b \\ \frac{1}{t} &= 2at \end{aligned}$$

が成り立つ。上 2 式より

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2t^2} \\ b &= \frac{1}{2} - \log t \end{aligned}$$

である。

さらに、 $b > 0$ という条件から、 t のとりうる値の範囲は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \log t &> 0 \\ \therefore 0 < t &< \sqrt{e} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{2t^2}, \quad b = \frac{1}{2} - \log t \quad (0 < t < \sqrt{e})$$

(4)

(2) で求めた S の式に (3) の結果を代入すると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{4 \left(\frac{1}{2} - \log t \right)^{\frac{3}{2}}}{3 \sqrt{\frac{1}{2t^2}}} \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{2} t \left(\frac{1}{2} - \log t \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{4}{3} \sqrt{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \log t \right)^{\frac{3}{2}} + t \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \log t \right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{t} \right) \right\} \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \log t \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \log t - \frac{3}{2} \right) \\ &= -\frac{4}{3} \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \log t \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \log t) \end{aligned}$$

より、 S の増減は下表のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...	$\sqrt{e}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f''(x)$					

よって、 $t = \frac{1}{e}$ のとき、 S は最大値

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{3} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{e} \left\{ \frac{1}{2} - (-1) \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{e} \end{aligned}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2\sqrt{3}}{e}$$