

【I】

- (1) 1 B, G, K
2 E
(2) 3 F
4 I
(3) 5 C
6 D
7 C
(4) 8 I
9 C

[解説]

(1)

$y=3\sin 2x$ のグラフを x 軸方向に $\frac{\pi}{3}+n\pi$ (n は整数) だけ平行移動すると

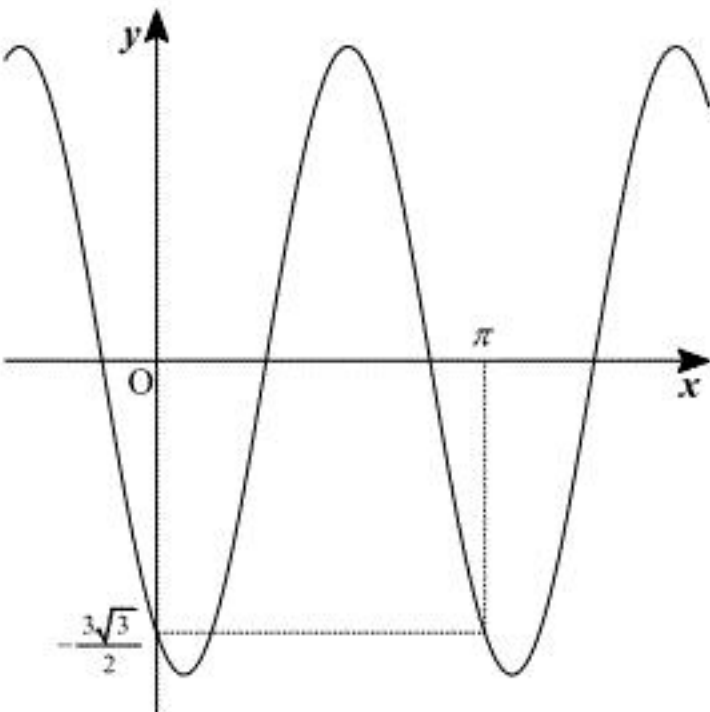
$$\begin{aligned}y&=3\sin 2\left\{x-\left(\frac{\pi}{3}+n\pi\right)\right\}\\&=3\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}-2n\pi\right)\\&=3\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

となる。したがって、 n は任意より答えは $-\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{3}$, その他, となる。また, 右辺を $f(x)$ とす

ると,

$$f(0)=f(\pi)$$

となる。よってグラフを書くと下図のようになる。



よって、正で最小の周期は π である。

(2)

AB を 2:1 に内分する点 P の座標が (1, 5) より

$$\begin{aligned}\frac{2B_x+A_x}{3}&=1\\&\Leftrightarrow 2B_x+A_x=3\\&\Leftrightarrow B_x=\frac{3-A_x}{2}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}\end{aligned}$$

となり、同様にして

$$B_y=\frac{15-A_y}{2}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

となる。また、AC を 4:1 に外分する点 Q の座標が (3, -3) より

$$\begin{aligned}\frac{-A_x+4C_x}{4-1}&=3\\&\Leftrightarrow C_x=\frac{9+A_x}{4}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{3}\end{aligned}$$

となり、同様にして

$$C_y=\frac{-9+A_y}{4}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{4}$$

となる。△ABC の重心の座標が (0, 2) であることと、①～④より

$$\begin{aligned}\frac{A_x+B_x+C_x}{3}&=0\\&\Leftrightarrow A_x+\frac{3-A_x}{2}+\frac{9+A_x}{4}=0\\&\Leftrightarrow 8A_x+12-4A_x+18+2A_x=0\\&\Leftrightarrow 6A_x=-30\\&\Leftrightarrow A_x=-5\end{aligned}$$

となる。同様にして

$$\begin{aligned}\frac{A_y+B_y+C_y}{3}&=2\\&\Leftrightarrow A_y+\frac{15-A_y}{2}+\frac{-9+A_y}{4}=6\\&\Leftrightarrow 8A_y+60-4A_y-18+2A_y=48\\&\Leftrightarrow 6A_y=6\\&\Leftrightarrow A_y=1\end{aligned}$$

となり、点 A の座標は (-5, 1) である。

(3)

真数条件より $x>0$ で問題文の条件より

$$1\leq x\leq 27\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}y&=\left(\log_3\frac{x}{9}\right)^3+6\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3x}\\&=(\log_3x-2)^3+\frac{\frac{6}{2}\log_33x}{\log_3\frac{1}{3}}\\&=(\log_3x-2)^3-3(\log_3x+1)\end{aligned}$$

で、 $\log_3x=A$ とすると

$$\begin{aligned}y&=A^3-6A^2+12A-8-3A-3\\&=A^3-6A^2+9A-11\end{aligned}$$

となる。右辺を $f(A)$ とすると

$$\begin{aligned}f(A)&=A^3-6A^2+9A-11\\f'(A)&=3A^2-12A+9\\&=3(A^2-4A+3)\\&=3(A-3)(A-1)\end{aligned}$$

である。また、①より $0\leq A\leq 3$ に注意して増減表を書くと、

A	0	…	1	…	3
$f'(A)$		+	0	-	0
$f(A)$		↗		↘	

となる。よって、求める最小値は

$$f(0)=f(3)=27-54+27-11=-11$$

で,

$$f(1)=1-6+9-11=-7$$

となる。

(4)

最初の1分間に出た水の量は

$$\begin{aligned}&\int_0^1(0.9\times 10^{-4}x^2-1.8\times 10^{-2}x+1)dx\\&=\left[0.3\times 10^{-4}x^3-0.9\times 10^{-2}x^2+x\right]_0^1\\&=0.99103\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。また、5分から6分の間に出た水の量の割合は

$$\begin{aligned}&\int_5^6(0.9\times 10^{-4}x^2-1.8\times 10^{-2}x+1)dx\\&=\left[0.3\times 10^{-4}x^3-0.9\times 10^{-2}x^2+x\right]_5^6\\&=0.90373\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}\end{aligned}$$

となるので、②の①に対する割合は

$$\frac{0.90373}{0.99103}\times 100\cong 91$$

である。また、 $x=0$ のとき $y=1$ なので、求める答えを x_3 とすると、

$$\begin{aligned}0.9\times 10^{-4}x_3^2-1.8\times 10^{-2}x_3+1&=\frac{1}{2}\\&\Leftrightarrow 0.9x_3^2-180x_3+5000=0\\&\Leftrightarrow x_3=\frac{90\pm\sqrt{8100-4500}}{0.9}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $0\leq x\leq 90$ より

$$x_3=\frac{30}{0.9}\cong 33$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1) 10 G

(2) 11 F

[解説]

(1)

Y_3 が 3 で割り切れない確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

であるので、求める確率は

$$1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

となる。

(2)

Y_6 が 4 で割り切れない場合は、2, 6 が合わせて 1 回のみ出て、4 が 1 回も出ない場合と、2, 4, 6 が 1 回も出ない場合がある。よって、求める確率は

$$\begin{aligned} & {}_6C_1 \times \left(\frac{2}{6}\right) \times \left(\frac{3}{6}\right)^5 + \left(\frac{3}{6}\right)^6 \\ &= \frac{4 \times 3^5}{6^6} + \frac{3^6}{6^6} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

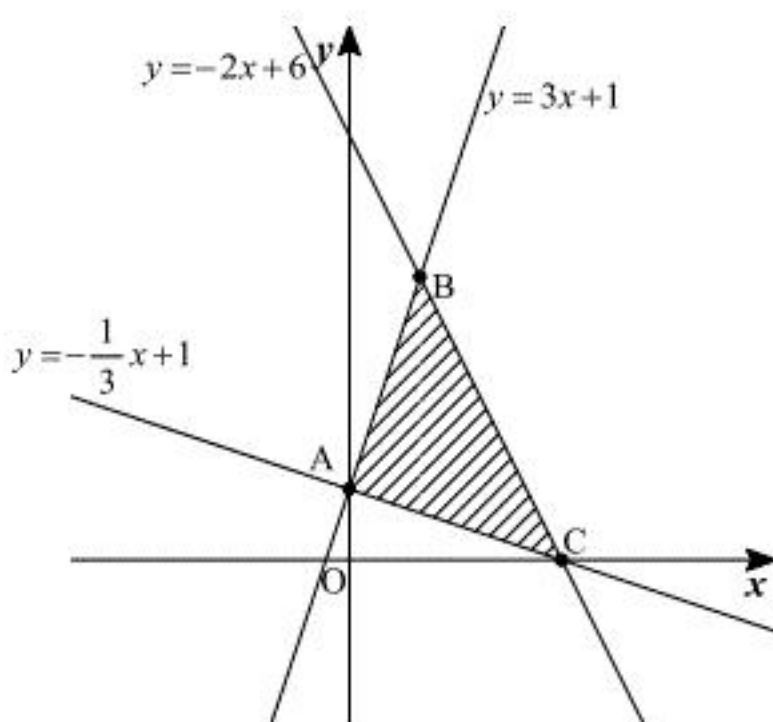
- (1) 12 F
13 C
(2) 14 H
15 H
101 $\sqrt{5}$

〔解説〕

文中の条件は

$$\begin{cases} y \leq 3x+1 \\ y \geq -\frac{1}{3}x+1 \\ y \leq -2x+6 \end{cases}$$

であり点 $(0, 1)$, $(1, 4)$, $(0, 3)$ をそれぞれ A, B, C として図示すると以下のようなになる。



(1)

k を実数として $3x+2y=k$ とすると

$$\begin{aligned} 3x+2y &= k \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3}{2}x + \frac{k}{2} \end{aligned}$$

となり、上図より点 B を通るとき k は最大で、点 A を通るとき最小である。よって、 k の

最大値は 11

最小値は 2

となる。

(2)

AB の垂直二等分線は $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ を通ることより

$$y = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、AC の垂直二等分線は $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を通ることより

$$y = 3\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①と②の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} &= 3\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 10x &= 20 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

となる。よって、交点の座標は $(2, 2)$ であり、これが外接円の中心である。また、半径は外接円の中心から点 A までの距離なので

$$\sqrt{(2-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$$

となる。

[IV]

$$(1) \quad 16 \quad C$$

$$17 \quad E$$

$$(2) \quad 102 \quad \frac{4 \cdot 9^{n-1}}{5^{n-1} + 3 \cdot 9^{n-1}}$$

[解説]

(1)

$a_1 = 1 > 0$ より帰納的に $a_n > 0$ である。よって、 $3a_n + 5 > 0$ であるので、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{9a_n}{3a_n + 5} \\ \Leftrightarrow \frac{3a_n + 5}{9a_n} &= \frac{1}{a_{n+1}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{5}{9}b_n &= b_{n+1} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - \frac{3}{4} &= \frac{5}{9} \left(b_n - \frac{3}{4} \right) \end{aligned}$$

となる。

(2)

まず、 $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$ であることと、(1)より

$$\begin{aligned} b_n - \frac{3}{4} &= \frac{5}{9} \left(b_{n-1} - \frac{3}{4} \right) \\ \Leftrightarrow b_n - \frac{3}{4} &= \left(\frac{5}{9} \right)^{n-1} \left(b_1 - \frac{3}{4} \right) \\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{1}{4} \left(\frac{5}{9} \right)^{n-1} + \frac{3}{4} \\ \therefore a_n &= \frac{4 \cdot 9^{n-1}}{5^{n-1} + 3 \cdot 9^{n-1}} \end{aligned}$$

となる。