

【I】

- (1) 最小 ㊸ 最大 ㊶ (2) 最小 ㊸ 最大 ㊶ (3) 最小 ㊶ 最大 ㊸  
(4) 最小 ㊸ 最大 ㊷ (5) 最小 ㊶ 最大 ㊷ (6) 最小 ㊶ 最大 ㊷  
(7) 最小 ㊶ 最大 ㊸ (8) 最小 ㊷ 最大 ㊶ (9) 最小 ㊷ 最大 ㊸  
(10) 最小 ㊷ 最大 ㊶

解説

(1)

与えられた等式を変形すると

$$\begin{aligned}2^{18} \cdot 2^a &= 2^{12} \cdot 4^b = 8^c = 2^{30} \\ \Leftrightarrow 2^{18+a} &= 2^{12+2b} = 2^{3c} = 2^{30} \\ \Leftrightarrow 18+a &= 12+2b=3c=30 \\ \therefore a=12, \quad b=9, \quad c=10\end{aligned}$$

となる。したがって  $b < c < a$  となる。

(2)

$2x^3+x^2-8x-3$  を  $x+2$  で割ると

$$2x^3+x^2-8x-3=(x+2)(2x^2-3x-2)+1$$

となる。したがって

$$f(x)=2x^2-3x-2$$

である。 $f(x)$  を平方完成すると

$$f(x)=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$$

となるので、放物線  $y=f(x)$  の軸は  $x=\frac{3}{4}$  である。したがって軸からの距離を考えると

$$f\left(\frac{3}{4}\right)<f\left(\frac{7}{4}\right)<f\left(-\frac{7}{4}\right)$$

となる。

(3)

$$a=\frac{1+0+0}{3}=\frac{1}{3}$$

$$b=\frac{-1+3+1}{3}=1$$

$$c=\frac{1-1+2}{3}=\frac{2}{3}$$

である。したがって  $a < c < b$  である。

(4)

線分 PQ を点 M が 3:2 に外分することより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{m} &= \frac{-2\overrightarrow{p}+3\overrightarrow{q}}{3-2} \\ &= \frac{-2\overrightarrow{p}+3\overrightarrow{q}}{1}\end{aligned}$$

である。すなわち  $a=1, b=-2, c=3$  (もしくはその正数倍) である。よって  $b < a < c$  である。

(5)

$1-\sqrt{3}i$  が解であることより、共役な複素数  $1+\sqrt{3}i$  もまた方程式の解である。したがって解と係数の関係より

$$\begin{aligned}a(1-\sqrt{3}i)+a(1+\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i) &= -2 \\ \Leftrightarrow 2a+4 &= -2 \\ \therefore a &= -3 \\ b &= -a-(1+\sqrt{3}i)-(1-\sqrt{3}i) \\ &= -a-2 \\ &= 1 \\ c &= -a(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i) \\ &= -4a \\ &= 12\end{aligned}$$

したがって  $a < b < c$  となる。

(6)

$f(x)$  を微分すると  $f'(x)=3ax^2+2bx+c$  となる。 $f(x)$  が  $x=-2, 3$  で極値をとることより

$f'(-2)=f'(3)=0$  である。すなわち

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3a(x-3)(x+2) \\ &= 3ax^2-3ax-18a\end{aligned}$$

となる。これを積分すると、 $f(x)$  の定数項が 0 であることに注意して

$$f(x)=ax^3-\frac{3}{2}ax^2-18ax$$

となる。したがって、係数を比較すると

$$b=-\frac{3}{2}a, \quad c=-18a$$

となる。 $y=f(x)$  において極小となる  $x$  の値が極大となる  $x$  の値よりも小さいことから  $a < 0$

である。したがって  $a < b < c$  である。

(7)

まず  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  の範囲で考える  $\sin \theta > |\cos \theta| \geq 0$  であるので  $0 < \theta < \pi$  である。この範囲において不等式の両辺は正であることに注意すると

$$\begin{aligned}\sin \theta &> |\cos \theta| \\ \Leftrightarrow \sin^2 \theta &> \cos^2 \theta \\ \Leftrightarrow 0 &> \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \Leftrightarrow 0 &> \cos 2\theta\end{aligned}$$

$0 < 2\theta < 2\pi$  の範囲でこれを解くと

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &< 2\theta < \frac{3}{2}\pi \\ \therefore \frac{\pi}{4} &< \theta < \frac{3}{4}\pi\end{aligned}$$

となる。これを一般角に直すと

$$2n\pi + \frac{\pi}{4} < \theta < 2n\pi + \frac{3}{4}\pi$$

となる。すなわち  $a=2, b=4, c=3$  であるから  $a < c < b$  である。

(8)

与えられた等式の左辺を通分すると

$$\begin{aligned}\frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x-2)} + \frac{c}{x-6} &= \frac{a(x-6)+b(x-2)(x-6)+c(x-2)^2}{(x-2)^2(x-6)} \\ &= \frac{(b+c)x^2+(a-8b-4c)x+(-6a+12b+4c)}{(x-2)^2(x-6)}\end{aligned}$$

となる。したがって係数を比較すると

$$\begin{aligned}b+c &= 0 \\ a-8b-4c &= 0 \\ -6a+12b+4c &= -16\end{aligned}$$

となる。これを解くと  $a=4, b=1, c=-1$  となる。よって  $c < b < a$  である。

(9)

南北に  $m$  本、東西に  $n$  本の道がある町の最短経路は、北に進むことを  $\uparrow$  東に進むことを  $\rightarrow$  としたとき、 $m$  個の  $\uparrow$  と  $n$  個の  $\rightarrow$  を並べ替えたものと同一視できる。したがって最短経路の数は一般に  $\frac{(m+n)!}{m!n!}$  通りである。したがって P を経由する場合の数は

$$\frac{3!}{2!1!} \times \frac{7!}{4!3!} = 105 \text{ 通り}$$

である。同様にして Q を経過する場合の数は

$$\frac{6!}{3!3!} \times \frac{4!}{2!2!} = 120 \text{ 通り}$$

であり、R を経過する場合の数は

$$\frac{5!}{4!1!} \times \frac{5!}{4!1!} = 25 \text{ 通り}$$

である。したがって

$$(\text{R を経由する場合の数}) < (\text{P を経由する場合の数}) < (\text{Q を経由する場合の数})$$

となる。

(10)

$A \cap B \cap C$  は  $1 \leq x \leq 9$  かつ  $3 \leq x \leq 6$  かつ  $4 \leq x \leq 8$  すなわち  $4 \leq x \leq 6$  を満たす正の整数の集合であるから  $n(A \cap B \cap C) = 3$  である。

$A \cap \bar{B} \cap C$  は  $1 \leq x \leq 9$  かつ  $(x \leq 2 \text{ または } 7 \leq x)$  かつ  $4 \leq x \leq 8$  を満たす正の整数の集合であるから  $A \cap \bar{B} \cap C = \{7, 8\}$  である。したがって  $n(A \cap \bar{B} \cap C) = 2$  である。

$A \cap B \cap \bar{C}$  は  $1 \leq x \leq 9$  かつ  $3 \leq x \leq 6$  かつ  $(x \leq 3 \text{ または } 9 \leq x)$  を満たす正の整数の集合であるから  $A \cap B \cap \bar{C} = \{3\}$  である。したがって  $n(A \cap B \cap \bar{C}) = 1$  となる。

よって

$$n(A \cap B \cap \bar{C}) < n(A \cap \bar{B} \cap C) < n(A \cap B \cap C)$$

である。

## 〔Ⅱ〕

(1)

与えられた不等式の左辺は底の変換公式を用いると

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_x 4 - \log_x 2 &= \log_2 x + \frac{\log_2 4}{\log_2 x} - \frac{\log_2 2}{\log_2 x} \\ &= X + \frac{1}{X}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad X + \frac{1}{X}$$

(2)

与えられた不等式の右辺は底の変換公式を用いると

$$\begin{aligned}\log_x \frac{8}{x} &= 3\log_x 2 - \log_x x \\ &= \frac{3}{X} - 1\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{3}{X} - 1$$

(3)

まず、真数や底の条件から、

$$\begin{aligned}x &> 0 \text{ かつ } x \neq 1 \\ \therefore X &= \log_2 x \neq 0\end{aligned}$$

である。

(1), (2)の結果から与えられた不等式を変形すると

$$X + \frac{1}{X} \geq \frac{3}{X} - 1$$

となる。

[1]  $X > 0$  ( $\Leftrightarrow x > 1$ ) のとき

不等式の両辺に  $X$  をかけて

$$\begin{aligned}X^2 + 1 &\geq 3 - X \\ \Leftrightarrow X^2 + X - 2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (X + 2)(X - 1) &\geq 0\end{aligned}$$

となるが、 $X > 0$  より、不等式を満たすのは

$$\begin{aligned}X &\geq 1 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &\geq 1 \\ \Leftrightarrow x &\geq 2\end{aligned}$$

である。

[2]  $X < 0$  ( $\Leftrightarrow x < 1$ ) のとき

同様に变形すると

$$(X + 2)(X - 1) \leq 0$$

となるが、 $X < 0$  より、不等式を満たすのは

$$\begin{aligned}-2 &\leq X < 0 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq \log_2 x < 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} &\leq x < 1\end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より、与えられた不等式を満たす  $x$  の範囲は

$$\frac{1}{4} \leq x < 1, \quad x \geq 2$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{4} \leq x < 1 \text{ または } x \geq 2$$

### 〔Ⅲ〕

(1)

$k=0$ とき  $1 \leq i \leq 1=4^0$  であるので  $i=1$  である。

このとき  $a(2)=a(4^k+i)$  であるから、i)より  $a(2)$  は  $a(i)+1=1$  を 6 で割った余りである。よって

$$a(2)=1$$

である。

次に、 $a(3)=a(2 \cdot 4^k+i)$  であるから、ii)より  $a(3)$  は  $a(i)+5=5$  を 6 で割った余りである。よって

$$a(3)=5$$

である。

最後に、 $a(4)=a(3 \cdot 4^k+i)$  であるから、iii)より

$$a(4)=a(i)=0$$

である。

$$(\text{答}) \quad a(2)=1, a(3)=5, a(4)=0$$

(2)

$1 \leq i \leq 4^k$  より、 $k \geq 1$  のとき、 $i$  は値 1, 2, 3 を取り得る。

i)において  $i=1$  を代入すると、 $a(4^k+1)$  は  $a(1)+1=1$  を 6 で割った余りであるので

$$a(4^k+1)=1 \text{ である。}$$

ii)において  $i=2$  を代入すると、 $a(2 \cdot 4^k+2)$  は  $a(2)+5=6$  を 6 で割った余りであるので

$$a(2 \cdot 4^k+2)=0 \text{ である。}$$

iii)において  $i=3$  を代入すると、 $a(3 \cdot 4^k+3)=a(3)=5$  である。

$$(\text{答}) \quad a(4^k+1)=1, a(2 \cdot 4^k+2)=0, a(3 \cdot 4^k+3)=5$$

(3)

$$\begin{aligned} 182 &= 2 \cdot 4^3 + 54 \\ &= 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 6 \\ &= 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 182 = 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2$$

(4)

ii)より  $a(182)=a(2 \cdot 4^3+3 \cdot 4^2+1 \cdot 4+2)$  は  $a(3 \cdot 4^2+1 \cdot 4+2)+5$  を 6 で割った余りである。

iii)より  $a(3 \cdot 4^2+1 \cdot 4+2)=a(4+2)$  である。

i)より  $a(4+2)$  は  $a(2)+1=2$  を 6 で割った余りであるので  $a(4+2)=2$  である。したがって、

$$a(3 \cdot 4^2+1 \cdot 4+2)=2 \text{ である。}$$

以上より、 $a(182)$  は  $2+5=7$  を 6 で割った余りとなるので、

$$\begin{aligned} a(182) &= a(2 \cdot 4^3+3 \cdot 4^2+1 \cdot 4+2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a(182)=1$$

# 〔Ⅳ〕

(1)

ある点から円にひいた 2 つの接線の長さは等しいので、 $OP=OB=2$ である。

(答)  $OP=2$

(2)

円 C の中心は 2 点 A, B の中点であるから  $Q(2, 1)$  である。また半径は  $\frac{1}{2}AB=1$  である。した

がって円 C の方程式は  $(x-2)^2+(y-1)^2=1$  である。これと  $y=kx$  から  $y$  を消去して整理する

と

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(kx-1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (k^2+1)x^2-2(k+2)x+4 &= 0\end{aligned}$$

となる。直線  $y=kx$  が円 C に接するための条件は、 $x$  の 2 次方程式が重解を持つことである。判別式を  $D$  とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (k+2)^2-4(k^2+1) \\ &= -3k^2+4k \\ &= -3k\left(k-\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

であるから、求める条件は

$$D=0 \Leftrightarrow k=\frac{4}{3} \quad (\because k>0)$$

である。

(答)  $k=\frac{4}{3}$

(3)

外心を R とする。R は線分 PB の垂直二等分線と線分 QB の垂直二等分線の交点である。線分 PB の垂直二等分線は 2 点 O, Q を通るので、その方程式は  $y=\frac{1}{2}x$  である。一方、線分 QB

の垂直二等分線は  $y=\frac{1}{2}$  である。したがって  $y=\frac{1}{2}x$  と  $y=\frac{1}{2}$  の交点を考えて

$$R\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

である。

(答)  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

(4)

$\triangle BQP$  の外接円の中心は  $R\left(1, \frac{1}{2}\right)$  である。点 B は円周上の点であり

$$\begin{aligned}RB &= \sqrt{(1-2)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}}\end{aligned}$$

であるから  $\triangle BQP$  の外接円の半径は  $\sqrt{\frac{5}{4}}$  である。したがってその方程式は

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

となる。

(答)  $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$