

【 I 】

- | | | |
|-----|---------|---------|
| (1) | アイウエオ | 31204 |
| | カキ | 60 |
| | クケ | 30 |
| (2) | コ, サ, シ | 1, 5, 2 |
| | ス, セ, ソ | 3, 5, 2 |
| (3) | タ, チ | ⑥, 2 |
| | ツテ | 24 |
| | ト | ⑥ |

【解説】

- (1)
- いま、万の位が1である5桁の整数は、
- $$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ 通り}$$
- である。同様に、万の位が2である5桁の整数も、24通りである。よって、57番目の整数というのは、万の位が3である5桁の整数の小さい方から数えて9番目の整数である。千の位が0の整数は、
- $$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ 通り}$$
- であるので、千の位が1の整数を小さい順に数え上げると、
- $$31024, 31042, 31204, \dots$$
- となる。よって、57番目に小さい整数は、
- $$31204$$
- である。
- また、偶数であるためには、1の位の数字が0, 2または4でなければならない。
- [1] 1の位が0のとき
- 5桁の整数は、
- $$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ 個}$$
- ある。
- [2] 1の位が2のとき
- 5桁の整数は、
- $$3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18 \text{ 個}$$
- ある。
- [3] 1の位が4のとき
- 5桁の整数は、
- $$3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18 \text{ 個}$$
- ある。
- 以上、[1], [2], [3]より求める偶数である整数は、
- $$24 + 18 + 18 = 60 \text{ 個}$$
- ある。
- また、4の倍数であるためには、下二桁の数が4の倍数でなければならない。そのような下二桁の組み合わせは、
- $$04, 12, 20, 24, 32, 40$$
- となる。
- [4] 下二桁が04, 20, 40のとき
- 5桁の整数はそれぞれ、
- $$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ 個}$$
- ある。
- [5] 下二桁が12, 24, 32のとき
- 5桁の整数はそれぞれ、
- $$2 \times 2 \times 1 = 4 \text{ 個}$$
- ある。
- 以上、[4], [5]より、4の倍数である整数は、
- $$6 \times 3 + 4 \times 3 = 30 \text{ 個}$$
- ある。

- (2)
- まず、 $x, y > 0 (x, y \neq 1)$ である。次に与式より、
- $$\begin{aligned} \log_x y + 2 \log_y x &= 3 \\ \Leftrightarrow \frac{\log_2 y}{\log_2 x} + 2 \frac{\log_2 x}{\log_2 y} &= 3 \\ \Leftrightarrow (\log_2 y)^2 + 2(\log_2 x)^2 &= 3(\log_2 x) \cdot (\log_2 y) \\ \Leftrightarrow (2 \log_2 x - \log_2 y)(\log_2 x - \log_2 y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1}{2} \log_2 y, \log_2 y & \end{aligned}$$
- となる。
- [1] $\log_2 x = \log_2 y$ のとき
- $x = y$ であるので、
- $$\begin{aligned} \log_x (y^2 + xy) &= 2 \\ \Leftrightarrow \log_x 2x^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow \log_x 2 + 2 &= 2 \\ \Leftrightarrow \log_x 2 &= 0 \end{aligned}$$
- となり、不適である。
- [2] $\log_2 x = \frac{1}{2} \log_2 y$ のとき
- $y = x^2$ であるので、
- $$\begin{aligned} \log_x (y^2 + xy) &= 2 \\ \Leftrightarrow \log_x x^3 (x+1) &= 2 \\ \Leftrightarrow \log_x (x+1) &= -1 \\ \Leftrightarrow x+1 &= \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$
- となり、
- $$\begin{aligned} y &= x^2 \\ &= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$
- である。
- 以上、[1], [2]より求める解は、
- $$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$
- である。

- (3)
- まず、
- $$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1} + n \cdot 1 + n \cdot 2 + \dots + n(n-1) \\ &= S_{n-1} + n \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= S_{n-1} + n \cdot \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$
- が成り立つので、階差数列とみなせる。よって、
- $$S_{n+1} - S_n = \frac{(n+1)^2 n}{2}$$
- であるので、
- $$\begin{aligned} S_n &= S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^2 \cdot k}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (k^3 + 2k^2 + k) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n^2 \cdot (n-1)^2}{4} + 2 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n-1)}{24} (3n^2 + 5n + 2) \\ &= \frac{n(n+1)}{24} (n-1)(3n+2) \\ &= \frac{1}{24} n(n+1)(3n^2 - n - 2) \end{aligned}$$
- となる。

〔Ⅱ〕

- (1) ア, イ 2, ②
 ウ, エ ③, ②
 (2) オ, カ 1, 3
 キ, ク 2, 3
 (3) ケ, コサ, シ 5, 17, 4

【解説】

(1)

ある実数 m, n を用いて,

$$\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{b} + n\overrightarrow{c}$$

とおく。まず, $\angle PBC = 90^\circ$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{AP}) \cdot (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) &= 0 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{b}|^2 - \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} - (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c})(m\overrightarrow{b} + n\overrightarrow{c}) &= 0 \\ \Leftrightarrow r^2 - r^2 \cos \theta - (mr^2 + nr^2 \cos \theta - mr^2 \cos \theta - nr^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \cos \theta)(m - n - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow m - n - 1 = 0 &\quad \dots \textcircled{1} \quad (\because \theta \neq 0)\end{aligned}$$

となる。また, $\angle PCA = 90^\circ$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow r^2 - m\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} - nr^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - m\cos \theta - n &= 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。①と②を連立させると,

$$\begin{aligned}\textcircled{1} - \textcircled{2} \\ \Leftrightarrow m &= \frac{2}{1 + \cos \theta}\end{aligned}$$

となるので,

$$n = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

である。よって,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{1 + \cos \theta} \overrightarrow{b} + \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \overrightarrow{c}$$

である。

(2)

三角形 ABC と三角形 BCP は底辺 BC を共有しているので, BC の中点を M とすると, $\triangle ABC = \triangle BCP$ より,

$$AM = BP \quad \dots \textcircled{1}$$

である。まず,

$$AM = r \cos \frac{\theta}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。また, (1) より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BP}|^2 &= \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^2 (|\overrightarrow{b}|^2 + 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + |\overrightarrow{c}|^2) \\ &= \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^2 \cdot 2r^2 (1 + \cos \theta) \\ &= \frac{1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} \cdot 2r^2 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となる。①に②と③を代入すると,

$$\begin{aligned}AM^2 &= BP^2 \\ \Leftrightarrow r^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} \cdot 2r^2 \\ \Leftrightarrow (1 + \cos \theta)^2 &= 4(1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) \\ \Leftrightarrow (3\cos \theta - 1)(\cos \theta - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} r^2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} r^2\end{aligned}$$

である。

(3)

③より,

$$\begin{aligned}AB &= BP \\ \Leftrightarrow AB^2 &= BP^2 \\ \Leftrightarrow r^2 &= \frac{1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} \cdot 2r^2 \\ \Leftrightarrow 1 + \cos \theta &= 2 - 4\cos \theta + 2\cos^2 \theta \\ \Leftrightarrow 2\cos^2 \theta - 5\cos \theta + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}\end{aligned}$$

となるが, $-1 < \cos \theta < 1$ であるので,

$$\cos \theta = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$

となる。

【Ⅲ】

- (1) ア, イ ⑤, ⑨
 ウ, エ ⑧, 2
 (2) オ, カ, キ, ク 1, 3, ⑧, 3
 ケ, コ 1, 2
 サ, シ 1, 3
 (3) ス, セ, ソ ⑨, ②, ⑨
 タ, チ, ツ, テ 3, 2, 1, 3

【解説】

(1)

C_1 の式を $y=f(x)$ とすると,

$$f'(x)=2x$$

であるので, l_1 の傾きは $2t$ である。よって, l_2 の傾きは $-\frac{1}{2t}$ であるので, l_2 の式は,

$$l_2: y = -\frac{1}{2t}(x-t) + t^2$$

となる。ここで, C_2 の式を $y=g(x)$ とすると,

$$g'(x) = -2x + a$$

であり, l_2 が点Pで C_2 に接することより,

$$\begin{cases} g'(t) = -\frac{1}{2t} \\ g(t) = t^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2t - \frac{1}{2t} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

となる。よって,

$$C_2: y = -x^2 + \left(2t - \frac{1}{2t}\right)x + \frac{1}{2}$$

となるので, $y=f(x)$ と連立すると,

$$2x^2 - \left(2t - \frac{1}{2t}\right)x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)\left(4t + \frac{1}{t}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = t, -\frac{1}{4t}$$

となる。よって, Qの座標は,

$$\left(-\frac{1}{4t}, \frac{1}{16t^2}\right)$$

である。また, 線分PQの長さは,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(t + \frac{1}{4t}\right)^2 + \left(t^2 - \frac{1}{16t^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(t + \frac{1}{4t}\right)^2 + \left\{\left(t + \frac{1}{4t}\right)\left(t - \frac{1}{4t}\right)\right\}^2} \\ &= \left(t + \frac{1}{4t}\right) \cdot \sqrt{1 + \left(t - \frac{1}{4t}\right)^2} \\ &= \left(t + \frac{1}{4t}\right) \cdot \sqrt{t^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16t^2}} \\ &= \left(t + \frac{1}{4t}\right)^2 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{4t}}^t \left\{ -2x^2 + \left(2t - \frac{1}{2t}\right)x + \frac{1}{2} \right\} dx \\ &= -\frac{1}{6} \cdot (-2) \cdot \left\{ t - \left(-\frac{1}{4t}\right) \right\}^3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(t + \frac{1}{4t}\right)^3 \end{aligned}$$

である。ここで, $t > 0$ より, 相加相乗平均の公式より,

$$\begin{aligned} t + \frac{1}{4t} &\geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{4t}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり, 等号は,

$$t = \frac{1}{4t}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \quad (\because t > 0)$$

のときに成り立つ。よって, S は $t = \frac{1}{2}$ のときに最小値 $\frac{1}{3}$ を取る。

(3)

$$\begin{aligned} C_2: y &= -x^2 + \left(2t - \frac{1}{2t}\right)x + \frac{1}{2} \\ &= -\left\{x - \left(t - \frac{1}{4t}\right)\right\}^2 + t^2 + \frac{1}{16t^2} \end{aligned}$$

であるので, 頂点Rは $\left(t - \frac{1}{4t}, t^2 + \frac{1}{16t^2}\right)$ である。よって, $\triangle PQR$ の重心を (X, Y) をすると,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} X = \frac{t - \frac{1}{4t} + t - \frac{1}{4t}}{3} \\ Y = \frac{t^2 + \frac{1}{16t^2} + t^2 + \frac{1}{16t^2}}{3} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{2}{3}\left(t - \frac{1}{4t}\right) & \cdots \textcircled{1} \\ Y = \frac{2}{3}\left(t^2 + \frac{1}{16t^2}\right) & \cdots \textcircled{2} \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つので, ①より,

$$\begin{aligned} t - \frac{1}{4t} &= \frac{3}{2}X \\ \Leftrightarrow t^2 + \frac{1}{16t^2} - \frac{1}{2} &= \frac{9}{4}X^2 \\ \Leftrightarrow t^2 + \frac{1}{16t^2} &= \frac{9}{4}X^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となり, これを②に代入すると,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2}{3}\left(\frac{9}{4}X^2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。ここで, (X, Y) を (x, y) に置き換えると, 求める軌跡は,

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$$

である。