

〔 I 〕

ア

G

イ

E

ウ

B

エ

E

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} \right) \left(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n} \right)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{32^x - 1}{8^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{5x} - 1}{2^{3x} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)(2^{4x} + 2^{3x} + 2^{2x} + 2^x + 1)}{(2^x - 1)(2^{2x} + 2^x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{4x} + 2^{3x} + 2^{2x} + 2^x + 1}{2^{2x} + 2^x + 1} \\
 &= \frac{1+1+1+1+1}{1+1+1} \\
 &= \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

(3)

物質 P の量が $\frac{a}{2}$ となる時刻を t_0 は

$$y(t_0) = \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt_0} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -kt_0 = -\log 2$$

$$\Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{k} \log 2$$

となる。

〔Ⅱ〕

ア	B	イ	C	ウ	G	エ	B
オ	C						

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{1-x^2}{e^x} \end{aligned}$$

であるから増減表は以下のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	$+0$

増減表より、 $f(x)$ は $x=-1$ において最小値 0 をとる。

(2)

$y=k$ と $y=f(x)$ の交点を xy 平面上で考える。この2曲線の交点の数を実数解の数である。

下図より、 $k=\frac{4}{e}$ とすれば実数解は2個となる。

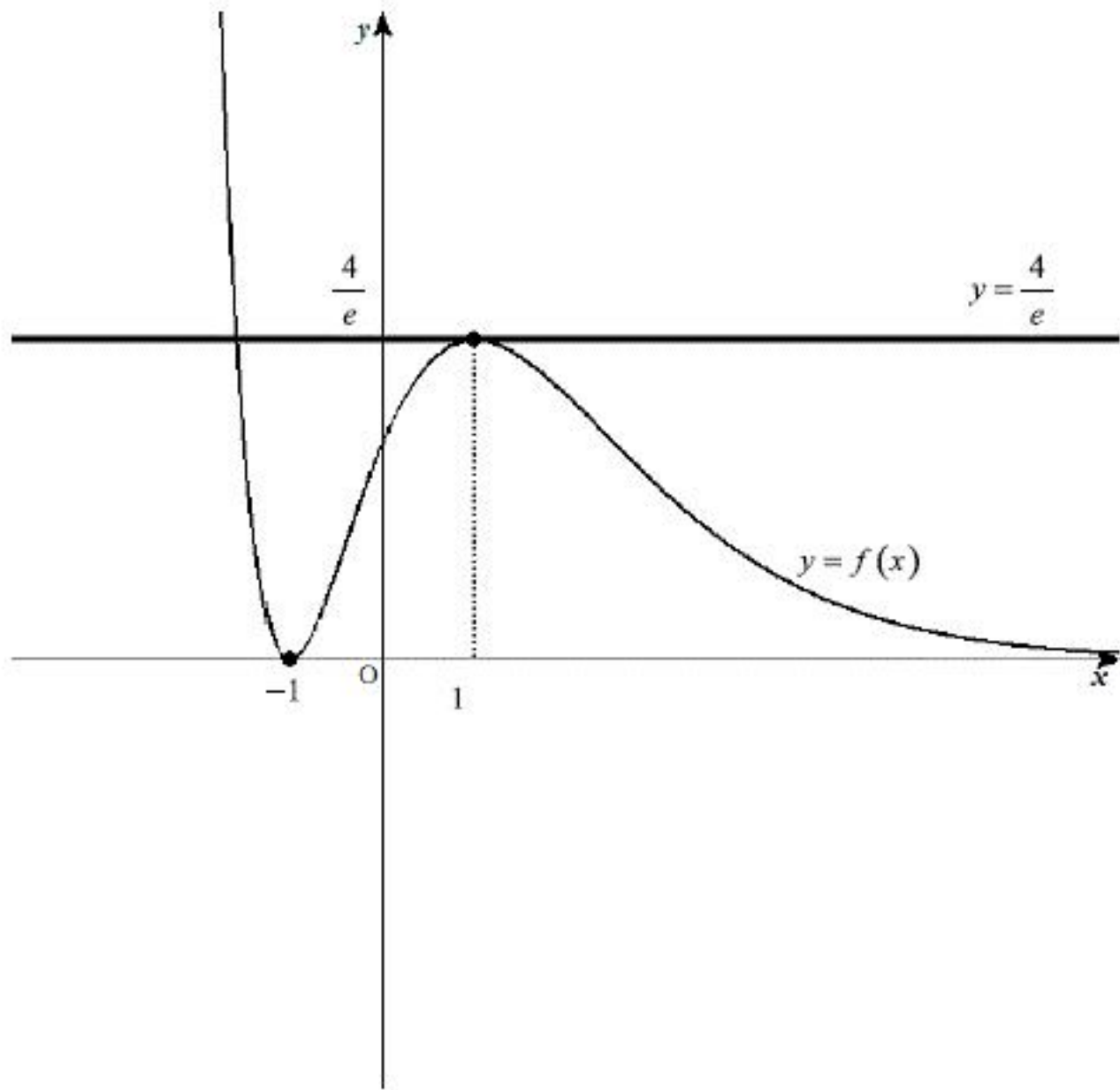
(3)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2xe^x - (1-x^2)e^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{x^2-2x-1}{e^x} \end{aligned}$$

であるから、 $f''(x)=0$ を解いて

$$\begin{aligned} x^2-2x-1 &= 0 \\ \therefore x &= 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

を得る。



〔Ⅲ〕

ア	G	イ	C	ウ	E	エ	D
オ	I	カ	A	キ	D		

〔解説〕

(1)

p_1 はさいころを1回ふったときに偶数が出る確率に等しいので、 $p_1=\frac{1}{2}$ である。

(2)

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= E \end{aligned}$$

より、 $A^a=E$ をみたす最小の自然数 a は2である。

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E \\ B^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -B \\ B^4 &= (-E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

より、 $B^b=E$ をみたす最小の自然数 b は4である。

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ AB^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ AB^3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、 $BA=AB^c$ をみたす最小の自然数 c は3である。

(3)

(2)より

$$A^2=E, B^2=-E, AB=-BA$$

が成り立つので、 A または B を n 回掛けてできた行列である M_n は、例えば

$$\begin{aligned} AABABABBA &= (AA)BABA(BB)A \\ &= -BABAA \\ &= -BAB \\ &= -B(-BA) \\ &= BBA \\ &= -A \end{aligned}$$

などと変形していくことにより、必ず

$$\pm A, \pm B, \pm AB, \pm E$$

のいずれかに帰着する。つまり、 $M_0, M_1, M_2, \cdots$ の中で相異なる行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

の最大8つである。

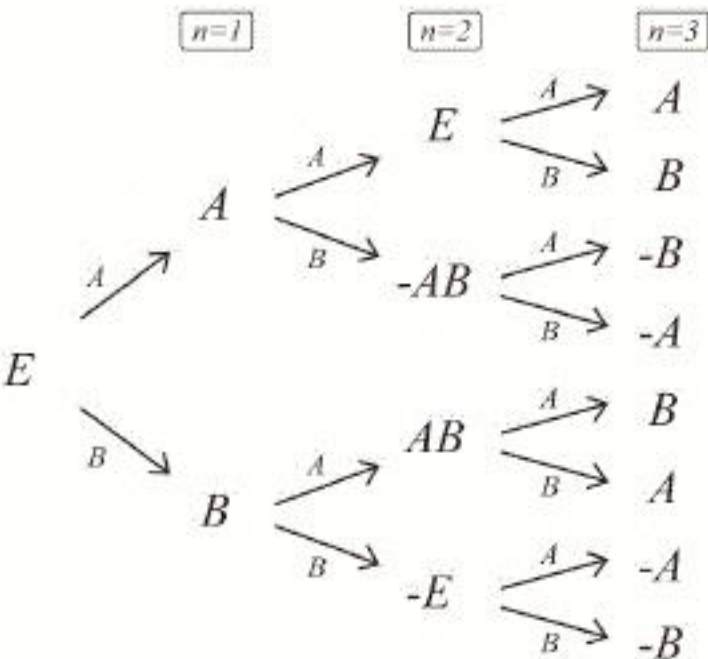
(4)

$n=2, 3, 4, \cdots$ において

n が偶数のとき M_n は等確率で $\pm AB, \pm E$ のいずれかとなり、 n が奇数のとき M_n は等確率で $\pm A, \pm B$ のいずれかである $\cdots (*)$

ことを、数学的帰納法により示す。

[1] $n=2, 3$ のとき



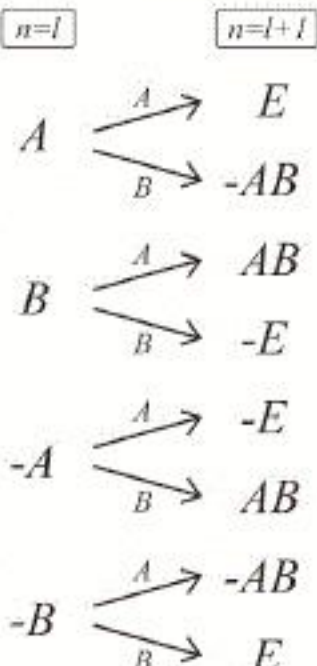
上図は M_n の遷移図である。さいころをふるごとに右から A または B が掛けられるが、これらは等確率に起こる（偶数の出る確率と奇数の出る確率は等しいから）。よって、 $n=2, 3$ のとき $(*)$ は成り立つ。

[2] $n=k$ （偶数）のとき

$(*)$ が成り立っていることを仮定すれば、遷移図の $n=2$ から $n=3$ への移り変わりに着目して、 $n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立っている（ M_{k+1} は等確率で $\pm A, \pm B$ のいずれかである）ことが言える。

[3] $n=l$ （奇数）のとき

$(*)$ が成り立っていることを仮定する。



このとき上図より、 $n=l+1$ のときも $(*)$ が成り立っている（ M_{l+1} は等確率で $\pm AB, \pm E$ のいずれかである）ことが言える。

以上[1], [2], [3]より、 $n=2, 3, 4, \cdots$ において $(*)$ が成り立つことが示された。

よって、 $M_n=A$ となる確率 p_n は、 n が偶数のとき $p_n=0$ であり、 n が3以上の奇数のとき

$p_n=\frac{1}{4}$ である。

〔Ⅳ〕

ア	H	イ	A	ウ	B	エ	E
オ	G	カ	H	キ	B	ク	H

〔解説〕

$$\left(\frac{x^2}{8}+4\right)'=\frac{x}{4}$$

を用いて、 C_1 上の点 $(4a, 2a^2+4)$ での接線の方程式は

$$y-(2a^2+4)=\frac{4a}{4}(x-4a)$$

$$\Leftrightarrow y=ax-2(a^2-2)$$

とわかる。 C_2 の点 (x_0, y_0) での接線の方程式は

$$x_0x+\frac{y_0y}{4}=2$$

であるから、これが C_1 の接線でもあるような条件は

$$y=ax-2(a^2-2)$$

$$x_0x+\frac{y_0y}{4}=2$$

の2式が恒等的に等しいことである。これに加えて (x_0, y_0) が C_2 上の点であることを用いると、

$$a=-2, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2$$

と求まり、

$$a_1=-2, a_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}, a_3=\frac{\sqrt{2}}{2}, a_4=2$$

であることがわかる。

楕円 $C_2: \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$ は、半径1の円（面積 π ）を x 軸方向に $\sqrt{2}$ 倍、 y 軸方向に $\sqrt{8}$ 倍したものであるから、 C_2 の囲む図形の面積は

$$\pi\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4\pi$$

である。

また、

$$f(x)=-2x-4$$

$$g(x)=2x-4$$

であるから、 $y=g(x)$ と C_2 の接点は $(1, -2)$ である。このとき、

$$y\geq f(x), y\geq g(x), x^2+\frac{y^2}{4}\geq 2, y\leq \frac{x^2}{8}+4, -8\leq x\leq 8, -2\leq y$$

を同時にみたす領域は下図斜線部（境界含む）となるから、この面積は

$$2\left[\int_0^8\left\{\left(\frac{x^2}{8}+4\right)-(2x-4)\right\}dx-\frac{1}{2}\cdot 4\pi-\int_0^1\left\{-2\sqrt{2-x^2}-(2x-4)\right\}dx\right]$$

$$=2\left\{\left[\frac{x^3}{24}-x^2+8x\right]_0^8-2\pi+2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)+[x^2-4x]_0^1\right\}$$

$$=2\left\{\frac{64}{3}-2\pi+\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-3\right\}$$

$$=\frac{116}{3}-3\pi$$

である。

