

数 学 問 題

注 意

1. この問題冊子は 12 ページあります。解答用紙には、表と裏があります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕,〔Ⅲ〕の解答は、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕は、解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
7. 1 問につき 2 つ以上マークしないこと。2 つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入しなさい。
9. 訂正するときは、消しゴムできれいに消し、消しクズを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また、所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は必ず提出しなさい。
12. 試験時間は 90 分です。

※ この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。

(マーク記入例)

良い例	悪い例
	

〔Ⅰ〕 以下の 中のアからナにあてはまる0から9までの数字を、解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし、カキクコサシタチツテトナは3桁の数、セソは2桁の数であり、その他は1桁の数である。なお、分数は既約分数にすること。また、ニヌネにあてはまるものを解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークせよ。

(1) 座標平面上の点 $P(x, y)$ が媒介変数 θ を用いて

$$x = -\sin \theta + 2 \cos \theta$$

$$y = 2 \sin \theta + 3 \cos \theta$$

と表されているとする。このとき、原点を O とすると

$$OP^2 = \text{ア} \sqrt{2} \sin \left(\text{イ} \theta + \frac{\pi}{\text{ウ}} \right) + \text{エ}$$

が成り立つ。

(2) 4つのサイコロを投げて、出た目の積を m とする。

(a) $m = 10$ となる確率は $\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキク}}}$ である。また、 $m = 60$ となる確率は

$\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサシ}}}$ である。

(b) m が 10 と互いに素になる確率は $\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セン}}}$ である。また、 m が 10 の倍

数となる確率は $\frac{\boxed{\text{タチツ}}}{\boxed{\text{テトナ}}}$ である。

ただし、自然数 a と b が互いに素であるとは、 a と b が 1 以外の公約数を持たないことをいう。

- (3) xy 座標平面上で、原点 O を中心とする半径 1 の円 O に正三角形 ABC が内接していて、三点 A, B, C はその順に反時計回りに位置している。点 A の x 座標と y 座標はともに正とする。直線 AC と y 軸は点 D で交わっていて、点 D を通り直線 BC に平行な直線は、円 O に点 E で接するという。このとき、線分 DE の長さは であって、 $\tan(\angle ODE) =$ となる。ゆえに、点 A の y 座標は である。

, の解答群

- | | | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| ① $\frac{1}{3}$ | ① $\frac{1}{\sqrt{6}}$ | ② $\frac{1}{2}$ | ③ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | ④ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ⑥ 1 | ⑦ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | ⑧ $\sqrt{2}$ | ⑨ $\sqrt{3}$ |

の解答群

- | | | | | |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| ① $\sqrt{\frac{1}{3}}$ | ① $\sqrt{\frac{2}{3}}$ | ② $\sqrt{\frac{2}{5}}$ | ③ $\sqrt{\frac{3}{5}}$ | ④ $\sqrt{\frac{3}{7}}$ |
| ⑤ $\sqrt{\frac{4}{7}}$ | ⑥ $\sqrt{\frac{5}{11}}$ | ⑦ $\sqrt{\frac{6}{11}}$ | ⑧ $\sqrt{\frac{6}{13}}$ | ⑨ $\sqrt{\frac{7}{13}}$ |

〔Ⅱ〕 以下の空欄 から にあてはまるもの(数・式など)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1 + |x^2 - 2x - 3| \text{ とおく。}$$

(1) 不等式 $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ を解くと となる。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の実数解をすべて求めると となる。

(3) 関数 $y = f(x)$ の定義域を $-2 \leq x \leq 5$ とするとき、値域は となる。

〔Ⅲ〕 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の成分は、 $a + d - 1 = ad - bc$ を満たすとする。また、

数列 $x_0, x_1, x_2, \dots$ と $y_0, y_1, y_2, \dots$ は

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。座標平面上の点 (x_n, y_n) を P_n と表し、 O は原点とする。

点 O, P_0, P_1 は同一直線上にはないと仮定し、 $g = ad - bc$ とおく。

以下の空欄 から にあてはまるものを、 g, n を用いて表し、解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) $\overrightarrow{OP_2} = (\text{え}) \overrightarrow{OP_1} + (\text{お}) \overrightarrow{OP_0}$ である。

(2) $g \neq 1$ のとき

$$\overrightarrow{OP_n} = \frac{\text{か}}{1-g} \overrightarrow{OP_1} + \frac{\text{き}}{1-g} \overrightarrow{OP_0} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

である。

(3) $|g| < 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \text{<} x_1 + \text{け} x_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \text{<} y_1 + \text{け} y_0$$

である。

(4) $0 < g < 1$ とする。点 $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right)$ は線分 P_1P_0 を : 1 に外分する。

〔Ⅳ〕 以下の問に答えよ。答えだけでなく解答の途中経過も書くこと。

曲線 $y = \log x$ 上の点 $P(t, \log t)$ における接線を ℓ とする。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

以下では、曲線 $y = ax^2 - b$ は点 P を通り、 P において ℓ に接しているとする。ただし、 a と b は正の数である。曲線 $y = ax^2 - b$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S とする。

(2) S を a, b を用いて表せ。

(3) a, b を t で表し、 t のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) S の最大値を求めよ。なお、 S がその最大値をとる t の値も求めること。