

【1】

- (1) ア 6 イ 8 ウ 6 エ 0
(2) ア 1 イ 2 ウ 1 エ 2 オ 3 カ 2 キ 3 ク 2
(3) ア 5 イ 2 ウ 1 エ 1
(4) ア 3 イ 2 ウ 5 エ 6 オ 4 カ 3 キ 1 ク 4
(5) ア 3 イ 7 ウ 6 エ 1 オ 0
(6) ア 3 イ 2 ウ 7

【解説】

(1)
 $xy=7, x+y=4$ である。したがって

$$\begin{aligned}x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= 64-84 \\ &= -20\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}x^6y^3+x^3y^6 &= x^3y^3(x^3+y^3) \\ &= 7^3 \cdot (-20) \\ &= -6860\end{aligned}$$

となる。

(2)
 $t=x-1$ とおく。このとき与えられた不等式は

$$\begin{aligned}t^2-4|t|+2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (|t|-2)^2 &\geq 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}+2 \leq |t| \text{ または } |t| \leq 2-\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow -2+\sqrt{2} \leq t \leq 2-\sqrt{2} \text{ または } t \leq -2-\sqrt{2} \text{ または } \sqrt{2}+2 \leq t \\ \therefore \Leftrightarrow -1+\sqrt{2} \leq x \leq 3-\sqrt{2} \text{ または } x \leq -1-\sqrt{2} \text{ または } 3+\sqrt{2} \leq x\end{aligned}$$

となる。

(3)
真数は正であるので

$$7 < x < 17 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。底の変換公式より

$$\log_{\sqrt{2}}(x-7) = 2\log_2(x-7)$$

である。したがって与えられた式から y を消去すると

$$\begin{aligned}2+\log_2(17-x) &= 2\log_2(x-7) \\ \Leftrightarrow \log_2 \frac{(x-7)^2}{17-x} &= \log_2 4 \\ \Leftrightarrow \frac{(x-7)^2}{17-x} &= 4 \\ \Leftrightarrow x^2-10x-19 &= 0 \\ \therefore x &= 5 \pm 2\sqrt{11}\end{aligned}$$

となる。したがって①より

$$x = 5 + 2\sqrt{11}$$

となる。

(4)
①
与えられた漸化式より

$$\begin{aligned}4(a_{n+2}-a_{n+1}) &= (a_{n+1}-a_n) \\ \therefore a_{n+2}-a_{n+1} &= \frac{1}{4}(a_{n+1}-a_n)\end{aligned}$$

となる。また

$$a_2-a_1 = -\frac{9}{16}$$

であるので数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $-\frac{9}{16}$ 、公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列である。したがって

$$a_{n+1}-a_n = -\frac{9}{4^{n+1}}$$

となる。これより

$$\begin{aligned}a_4 &= a_3 - \frac{9}{4^4} \\ &= \frac{3}{4^2} - \frac{9}{4^3} - \frac{9}{4^4} \\ &= \frac{3}{256}\end{aligned}$$

となる。

②
①の結果より $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{9}{4^{k+1}} \right) + a_1 \\ &= -\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{4^{n-1}} \right) + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4^n}\end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つ。したがって

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n ka_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{3k}{4^k}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}S_n - \frac{1}{4}S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{3k}{4^k} - \sum_{k=1}^n \frac{3k}{4^{k+1}} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3n}{4^{n+1}} + \sum_{k=2}^n \frac{3k}{4^k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3k}{4^{k+1}} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3n}{4^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3(k+1)}{4^{k+1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3k}{4^{k+1}} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3n}{4^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3}{4^{k+1}} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3n}{4^{n+1}} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3n}{4^{n+1}} + \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} - \frac{3n}{4^{n+1}}\end{aligned}$$

と計算できるので、

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}S_n &= \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} - \frac{3n}{4^{n+1}} \\ \therefore S_n &= \frac{4}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} - \frac{n}{4^n}\end{aligned}$$

となる。

(5)
 $AC=x, \angle D=\theta$ とおく。このとき $\triangle ABC, \triangle ADC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}x^2 &= 9+16-2 \cdot 3 \cdot 4 \cos(\pi-\theta) \\ &= 25+24 \cos \theta \\ x^2 &= 36+25-2 \cdot 5 \cdot 6 \cos \theta \\ &= 61-60 \cos \theta\end{aligned}$$

となる。したがって

$$61-60 \cos \theta = 25+24 \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{3}{7}$$

となる。このとき、 $0 < \theta < \pi$ より、 $\sin \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

である。したがって求める面積は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 4 + 5 \cdot 6) \sin \theta \\ &= 6\sqrt{10}\end{aligned}$$

となる。

(6)
 $A = \int_1^3 f(t) dt$ とおく。このとき

$$f(x) = 3x^2 + 2Ax - 5$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}A &= \int_1^3 (3t^2 + 2At - 5) dt \\ &= \left[t^3 + At^2 - 5t \right]_1^3 \\ &= 27 + 9A - 15 - (1 + A - 5) \\ &= 8A + 16 \\ \therefore A &= -\frac{16}{7}\end{aligned}$$

となる。よって

$$f(x) = 3x^2 - \frac{32}{7}x - 5$$

となる。

〔Ⅱ〕

$$(1) \quad \text{BD}:\text{DC}=t:s$$

$$(2) \quad \frac{\sin 2A}{x} = \frac{\sin 2B}{y} = \frac{\sin 2C}{z}$$

$$\overrightarrow{\text{PD}} = \frac{s}{s+t} \overrightarrow{\text{PB}} + \frac{t}{s+t} \overrightarrow{\text{PC}} \quad (3) \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

$$\overrightarrow{\text{PE}} = \frac{t}{r+t} \overrightarrow{\text{PC}} + \frac{r}{r+t} \overrightarrow{\text{PA}} \quad (4) \quad \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

$$\frac{r}{x} = \frac{s}{y} = \frac{t}{z}$$

$$(5) \quad \frac{a \cos B \cos C}{x} = \frac{b \cos C \cos A}{y} = \frac{c \cos A \cos B}{z}$$

〔解説〕

(1)

$$\text{BD}:\text{DC}=\triangle \text{ABP}:\triangle \text{ACP}=t:s$$

である。したがって点Dは線分BCを $t:s$ に内分するので

$$\overrightarrow{\text{PD}} = \frac{s}{s+t} \overrightarrow{\text{PB}} + \frac{t}{s+t} \overrightarrow{\text{PC}} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。同様に

$$\text{AE}:\text{EC}=\triangle \text{ABP}:\triangle \text{BCP}=t:r$$

である。したがって点Eは線分ACを $t:r$ に内分するので

$$\overrightarrow{\text{PE}} = \frac{t}{r+t} \overrightarrow{\text{PC}} + \frac{r}{r+t} \overrightarrow{\text{PA}} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 $\overrightarrow{\text{PD}}, \overrightarrow{\text{PE}}$ はそれぞれ $\overrightarrow{\text{PA}}, \overrightarrow{\text{PB}}$ のスカラー倍であるから、

$$\overrightarrow{\text{PD}} = \alpha \overrightarrow{\text{PA}}, \overrightarrow{\text{PE}} = \beta \overrightarrow{\text{PB}}$$

とおくと、①は、

$$\begin{aligned} \alpha \overrightarrow{\text{PA}} &= \frac{s}{s+t} \overrightarrow{\text{PB}} + \frac{t}{s+t} \overrightarrow{\text{PC}} \\ \Leftrightarrow -(s+t) \alpha \overrightarrow{\text{PA}} + s \overrightarrow{\text{PB}} + t \overrightarrow{\text{PC}} &= \vec{0} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

と変形でき、②は、

$$\begin{aligned} \beta \overrightarrow{\text{PB}} &= \frac{t}{r+t} \overrightarrow{\text{PC}} + \frac{r}{r+t} \overrightarrow{\text{PA}} \\ \Leftrightarrow r \overrightarrow{\text{PA}} - (r+t) \beta \overrightarrow{\text{PB}} + t \overrightarrow{\text{PC}} &= \vec{0} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{4}$$

と変形できる。③、④より、

$$\{r+(s+t)\alpha\}\overrightarrow{\text{PA}} - \{s+(r+t)\beta\}\overrightarrow{\text{PB}} = \vec{0}$$

が成り立つ。 $\overrightarrow{\text{PA}}$ と $\overrightarrow{\text{PB}}$ は一次独立より、

$$\begin{cases} r+(s+t)\alpha=0 \\ s+(r+t)\beta=0 \\ \therefore \begin{cases} -(s+t)\alpha=r \\ -(r+t)\beta=s \end{cases} \end{cases}$$

と求まる。したがって、③、④より、

$$r \overrightarrow{\text{PA}} + s \overrightarrow{\text{PB}} + t \overrightarrow{\text{PC}} = \vec{0}$$

が成り立つことから、上式と $x \overrightarrow{\text{PA}} + y \overrightarrow{\text{PB}} + z \overrightarrow{\text{PC}} = \vec{0}$ が同値となる条件は、

$$s:t=y:z, t:r=z:x$$

である。したがって、

$$\frac{r}{x} = \frac{s}{y} = \frac{t}{z}$$

となる。

(2)

このとき $\text{PA}=\text{PB}=\text{PC}=k$ とおくと

$$r = \frac{k^2}{2} \sin 2A, s = \frac{k^2}{2} \sin 2B, t = \frac{k^2}{2} \sin 2C$$

であるので

$$\begin{aligned} \frac{r}{x} = \frac{s}{y} = \frac{t}{z} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin 2A}{x} = \frac{\sin 2B}{y} = \frac{\sin 2C}{z} \end{aligned}$$

となる。

(3)

点Pが重心であるとき、点Dは辺BCを二等分するので

$$\begin{aligned} \text{BD} &= \text{CD} \\ \Leftrightarrow t &= s \end{aligned}$$

となる。同様にして、 $r=t=s$ である。したがって

$$\begin{aligned} \frac{r}{x} = \frac{s}{y} = \frac{t}{z} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

となる。

(4)

このとき内接円の半径を k とすると

$$r = \frac{k}{2} a, s = \frac{k}{2} b, t = \frac{k}{2} c$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \frac{r}{x} = \frac{s}{y} = \frac{t}{z} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \end{aligned}$$

となる。

(5)

点Pが垂心であるとき

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2} a \cdot \text{PD} \\ s = \frac{1}{2} b \cdot \text{PE} \\ t = \frac{1}{2} c \cdot \text{PF} \end{cases} \quad \dots \textcircled{5}$$

と表すことができるので、 $\text{PD}:\text{PE}:\text{PF}$ を考える。四角形AEPFに注目すると、向かい合う角の

和は 180° であるから

$$\angle \text{BPF} = \angle \text{CPE} = A$$

である。同様にして

$$\begin{cases} \angle \text{APF} = \angle \text{CPD} = B \\ \angle \text{APE} = \angle \text{BPD} = C \end{cases}$$

である。これを用いると

$$\begin{cases} \text{PD} = \text{PB} \cos C = \text{PC} \cos B \\ \text{PE} = \text{PC} \cos A = \text{PA} \cos C \\ \text{PF} = \text{PA} \cos B = \text{PB} \cos A \end{cases}$$

であるから、整理すると

$$\text{PD}:\text{PE}:\text{PF} = \frac{1}{\cos A}:\frac{1}{\cos B}:\frac{1}{\cos C}$$

である。よって、⑤と合わせて

$$r:s:t = \frac{a}{\cos A}:\frac{b}{\cos B}:\frac{c}{\cos C}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \frac{r}{x} = \frac{s}{y} = \frac{t}{z} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{x \cos A} = \frac{b}{y \cos B} = \frac{c}{z \cos C} \\ \Leftrightarrow \frac{a \cos B \cos C}{x} = \frac{b \cos C \cos A}{y} = \frac{c \cos A \cos B}{z} \end{aligned}$$

となる。