

【Ⅰ】

【解答】

1. (1) A (2) N 2. (3) L (4) E 3. (5) C (6) P

【解説】

1.

3 倍角の公式より

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + 2\cos \theta &= (4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) + 2\cos \theta \\ &= 4\cos^3 \theta - \cos \theta\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + 2\cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\cos^3 \theta - \cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\cos \theta \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{4} \right) &= 0 \\ \therefore \cos \theta &= 0, \pm \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

2.

このとき

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot \overline{b} &= 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 1\end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}|2\overline{a} - 3\overline{b}| &= \sqrt{4|\overline{a}|^2 + 9|\overline{b}|^2 - 12\overline{a} \cdot \overline{b}} \\ &= 2\sqrt{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|2\overline{a} + \overline{b}| &= \sqrt{4|\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 + 4\overline{a} \cdot \overline{b}} \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2\overline{a} - 3\overline{b}) \cdot (2\overline{a} + \overline{b}) &= 4|\overline{a}|^2 - 3|\overline{b}|^2 - 4\overline{a} \cdot \overline{b} \\ &= -12\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{(2\overline{a} - 3\overline{b}) \cdot (2\overline{a} + \overline{b})}{|2\overline{a} - 3\overline{b}| |2\overline{a} + \overline{b}|} \\ &= \frac{-12}{2\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{3}} \\ &= -\sqrt{\frac{3}{7}}\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}\overline{x} &= 2\overline{a} - 3\overline{b} \\ \overline{y} &= 2\overline{a} + \overline{b}\end{aligned}$$

とおくと、与えられたベクトル方程式は

$$\begin{aligned}(\overline{p} - \overline{x}) \cdot (\overline{p} - \overline{y}) &= 0 \\ \Leftrightarrow |\overline{p}|^2 - (\overline{x} + \overline{y}) \cdot \overline{p} + \overline{x} \cdot \overline{y} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left| \overline{p} - \frac{\overline{x} + \overline{y}}{2} \right|^2 - \left| \frac{\overline{x} + \overline{y}}{2} \right|^2 + \overline{x} \cdot \overline{y} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left| \overline{p} - \frac{\overline{x} + \overline{y}}{2} \right|^2 &= \left| \frac{\overline{x} - \overline{y}}{2} \right|^2 \\ \Leftrightarrow \left| \overline{p} - (2\overline{a} - \overline{b}) \right|^2 &= |2\overline{b}|^2 \\ \Leftrightarrow \left| \overline{p} - (2\overline{a} - \overline{b}) \right| &= 4\end{aligned}$$

となるので、与えられたベクトル方程式によって定まる円の半径は4である。

3.

放物線と直線の式から y を消去すると

$$\begin{aligned}mx &= 1 - \frac{m^2}{4} - x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + mx + \frac{m^2}{4} - 1 &= 0\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + mx + \frac{m^2}{4} - 1 \\ &= \left(x + \frac{m}{2} \right)^2 - 1\end{aligned}$$

とおく。求める条件は放物線 $y = f(x)$ が $x > 0$ の範囲に x 軸と共有点を持つことである。軸の方程式は

$$x = -\frac{m}{2} < 0 \quad (\because m > 0)$$

である。したがって放物線 $y = f(x)$ が $x > 0$ の範囲に x 軸と共有点を持つ条件は

$$\begin{aligned}f(0) &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow -2 &< m < 2\end{aligned}$$

となる。 $m > 0$ より、

$$0 < m < 2$$

であることが求める条件である。このときの放物線と直線の共有点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$)

とする。解と係数の関係より

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= -m \\ \alpha\beta &= \frac{m^2}{4} - 1\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}(\beta - \alpha)^3 &= \{(\beta - \alpha)^2\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} \\ &= (4)^{\frac{3}{2}} \\ &= 8\end{aligned}$$

となる。したがって求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \left(1 - \frac{m^2}{4} - x^2 \right) - mx \right\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

1. ア 3 イ 3 ウ 3 エ 3 オ 2 カ 3 キ 2
2. ク 3 ケ 2 コ 3 サ 2 シ 3 ス 2 セ 2 ソ 3 タ 2 チ 3

〔解説〕

1.

k を整数とする。 n が偶数のとき、

$$f_n(k) = \begin{cases} \frac{3n}{2} - 3k & (k = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}n \text{ のとき}) \\ -\frac{3n}{2} + 3k & (k = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。したがって $1 \leq k \leq n$ のとき、 $f_n(k-1)$ と $f_n(k)$ の差の絶対値は常に 3 であるので

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n 3 \\ &= 3n \end{aligned}$$

となる。一方 n が奇数のとき

$$f_n(k) = \begin{cases} \frac{3n}{2} - 3k & (k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \text{ のとき}) \\ -\frac{3n}{2} + 3k & (k = \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。したがって $1 \leq k \leq n$ のとき、 $f_n(k-1)$ と $f_n(k)$ の差の絶対値は $k \neq \frac{n+1}{2}$ のとき 3 で

あり $k = \frac{n+1}{2}$ のとき 0 である。したがって

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n 3 - 3 \\ &= 3n - 3 \end{aligned}$$

となる。よって n が奇数のとき、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} a_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \{3 \cdot (2k-1) - 3\} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 3 \cdot (2k) \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} (6k-6) + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 6k \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+3}{2} - 6 \cdot \frac{n+1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{3}{4}n^2 + 3n + \frac{9}{4} - 3n - 3 + \frac{3}{4}n^2 - \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

2.

$$\begin{aligned} f_n(k) - f_n(k-1) &= 3k(k-n) - 3(k-1)(k-1-n) \\ &= 3(2k-n-1) \end{aligned}$$

となる。したがって n が偶数のとき、

$$|f_n(k) - f_n(k-1)| = \begin{cases} 3(2k-n-1) & (k = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \text{ のとき}) \\ 3(n-2k+1) & (k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n/2} 3(n-2k+1) + \sum_{k=n/2+1}^n 3(2k-n-1) \\ &= 3 \sum_{k=1}^{n/2} (n-2k+1) + 3 \left\{ \sum_{k=1}^n (2k-n-1) - \sum_{k=1}^{n/2} (2k-n-1) \right\} \\ &= 6 \sum_{k=1}^{n/2} (n-2k+1) + 3 \sum_{k=1}^n (2k-n-1) \\ &= 6 \left\{ \frac{n}{2}(n+1) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \right\} + 3 \left\{ n(-n-1) + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \right\} \\ &= \frac{3}{2}n^2 \end{aligned}$$

となる。

n が奇数のとき、

$$|f_n(k) - f_n(k-1)| = \begin{cases} 3(2k-n-1) & (k = \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \dots, n \text{ のとき}) \\ 3(n-2k+1) & (k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{(n-1)/2} 3(n-2k+1) + \sum_{k=(n+1)/2}^n 3(2k-n-1) \\ &= \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。よって n が奇数のとき、奇数番目の項と偶数番目の項にわけて和を考えることで、

$\sum_{k=1}^n a_k$ は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_n) + (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{n-1}) \\ &= \frac{3}{2} \{ (1^2 - 1) + (3^2 - 1) + (5^2 - 1) + \dots + (n^2 - 1) \} + \frac{3}{2} \{ 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (n-1)^2 \} \\ &= \frac{3}{2} \left\{ (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2) - 1 \cdot \frac{n+1}{2} \right\} \\ &= \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} (n+1) \right\} \\ &= \frac{1}{4} (2n^3 + 3n^2 - 2n - 3) \end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅲ〕

1.

(1)

全ての偶数のカードを引いた後に最大の奇数のカードを引いたときに得点が最大となる。したがって、 $n=2$ のとき、最大の得点は、

$$2+4+3=9 \text{ (点)}$$

である。

(答) 9 点

(2)

1回目に偶数のカードを引いて、2回目に奇数のカードを引けばよいので、2枚のカードを引いてこのゲームが終了する場合のカードの引き方は、

$$2 \cdot 2 = 4 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 4 通り

2.

(1)

r 回目で終了するには1回目から $r-1$ 回目まで偶数のカードを引いて r 回目は奇数のカードを引けば良い。したがって、 r 回カードを引いて終了する場合のカードの引き方は、

$$\begin{aligned} & {}_n P_{r-1} \cdot n \\ &= \frac{n!}{\{n-(r-1)\}!} \cdot n \\ &= \frac{n \cdot n!}{(n+1-r)!} \text{ (通り)} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{n \cdot n!}{(n+1-r)!}$ 通り

(2)

(1)より、 r 回目に1のカードを引いて終了する場合のカードの引き方は、

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot n!}{(n+1-r)!} = \frac{n!}{(n+1-r)!} \text{ (通り)}$$

である。また、 $r-1$ 回目までは2以外の偶数のカードを引いて r 回目に1のカードを引いて終了する場合のカードの引き方は、

$$\begin{aligned} & {}_{n-1} P_{r-1} \cdot 1 \\ &= \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \text{ (通り)} \end{aligned}$$

である。したがって、 r 回目に1のカードを引いて終了するときに、引いた r 枚のカードの中に2の番号のカードが含まれる場合のカードの引き方は、

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n+1-r)!} - \frac{(n-1)!}{(n-r)!} &= \frac{(n-1)! \{n-(n+1-r)\}}{(n+1-r)!} \\ &= \frac{(r-1)(n-1)!}{(n+1-r)!} \text{ (通り)} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{(r-1)(n-1)!}{(n+1-r)!}$ (通り)

(3)

(2)より、ある偶数が含まれるようなカードの引き方は、それぞれ

$$\frac{(r-1)(n-1)!}{(n+1-r)!} \cdot n = \frac{(r-1)n!}{(n+1-r)!} \text{ (通り)}$$

であり、ある奇数が含まれるようなカードの引き方は、それぞれ

$$\frac{n!}{(n+1-r)!} \text{ (通り)}$$

である。また、1から $2n$ までに含まれる偶数の和は、

$$\begin{aligned} 2+4+\cdots+2n &= \frac{2+2n}{2} \cdot n \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

であり、奇数の和は、

$$\begin{aligned} 1+3+\cdots+(2n-1) &= \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

であるから、 r 枚のカードを引いて終わるすべてのカードの引き方に対するそれぞれの得点を、すべて合計した値は、

$$\begin{aligned} \frac{(r-1)n!}{(n+1-r)!} \cdot n(n+1) + \frac{n!}{(n+1-r)!} \cdot n^2 &= \frac{n!}{(n+1-r)!} \{(r-1)n(n+1)+n^2\} \\ &= \frac{n!}{(n+1-r)!} \{rn^2+rn-n\} \\ &= \frac{n(rn+r-1)n!}{(n+1-r)!} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{n(rn+r-1)n!}{(n+1-r)!}$