

【1】

|     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | ア | 1 | イ | 0 | ウ | 1 | エ | 5 | オ | 2 | カ | 6 |
| (2) | キ | 8 | ク | 1 | ケ | 5 |   |   |   |   |   |   |
| (3) | コ | 1 | サ | 2 | シ | 1 | ス | 3 | セ | 1 | ソ | 3 |
| (4) | タ | 1 | チ | 0 | ツ | 1 | テ | 1 | ト | 2 | ナ | 2 |
|     | ニ | 4 | ヌ | 0 |   |   |   |   |   |   |   |   |

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}100 &= 3 \cdot 33 + 1 \\ 2013 &= 3 \cdot 671\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}a_{100} &= 1 \\ a_{2013} &= 0\end{aligned}$$

である。また、 $m$ を自然数とすると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3m-2} \frac{a_k}{3^k} &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{0}{3^6} + \cdots + \frac{1}{3^{3m-2}} \\ &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \cdots + \frac{1}{3^{3m-3}} \right) + \frac{2}{3^2} \left( 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \cdots + \frac{1}{3^{3m-6}} \right) \\ &= \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \cdots + \frac{1}{3^{3(m-2)}} \right) + \frac{1}{3^{3m-2}} \\ &= \frac{5}{9} \frac{1 - \left( \frac{1}{3^3} \right)^{m-1}}{1 - \frac{1}{3^3}} + \frac{1}{3^{3m-2}} \\ &= \frac{15}{26} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{3^3} \right)^{m-1} \right\} + \frac{1}{3^{3m-2}} \\ \sum_{k=1}^{3m-1} \frac{a_k}{3^k} &= \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \cdots + \frac{1}{3^{3(m-1)}} \right) \\ &= \frac{15}{26} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{3^3} \right)^m \right\} \\ \sum_{k=1}^{3m} \frac{a_k}{3^k} &= \sum_{k=1}^{3m-1} \frac{a_k}{3^k} \\ &= \frac{15}{26} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{3^3} \right)^m \right\}\end{aligned}$$

となる。 $m \rightarrow \infty$ の極限をとるとすべて  $\frac{15}{26}$  に収束するので

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{15}{26}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^2 (\sin x)' dx \\ &= \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt \\ &= \int_0^1 (t^4 - 2t^2 + 1) dt \\ &= \left[ \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + t \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{15}\end{aligned}$$

と計算できる。

(3)

A, B, C のうち 1 人が賛成し 2 人が反対するのは、C が B を選ぶときであるから、その確率は

$$\frac{1}{2}$$

である。また、A, B, C, D のうち 1 人が賛成し 3 人が反対するのは、C が B を選びかつ D が B か C を選ぶときであるから、その確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

である。同様にして、3 人が賛成し 1 人が反対する確率も  $\frac{1}{3}$  であることがわかる。2 人が賛成

し 2 人が反対するのはこれらの余事象であるから、その確率は

$$1 - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

である。

(4)

$$\begin{aligned}y = 0 \text{ すなわち } n = 5x \text{ のとき } n &\text{ は } 0 \text{ 以上の } 5 \text{ の倍数,} \\ y = 1 \text{ すなわち } n = 5x + 11 = 5(x + 2) + 1 \text{ のとき } n &\text{ は } 11 \text{ 以上の } 5 \text{ で割って } 1 \text{ 余る整数,} \\ y = 2 \text{ すなわち } n = 5x + 22 = 5(x + 4) + 2 \text{ のとき } n &\text{ は } 22 \text{ 以上の } 5 \text{ で割って } 2 \text{ 余る整数,} \\ y = 3 \text{ すなわち } n = 5x + 33 = 5(x + 6) + 3 \text{ のとき } n &\text{ は } 33 \text{ 以上の } 5 \text{ で割って } 3 \text{ 余る整数,} \\ y = 4 \text{ すなわち } n = 5x + 44 = 5(x + 8) + 4 \text{ のとき } n &\text{ は } 44 \text{ 以上の } 5 \text{ で割って } 4 \text{ 余る整数}\end{aligned}$$

である。 $k$ を自然数、 $r = 0, 1, 2, 3, 4$  とすると、 $y = 5k + r$  のとき

$$\begin{aligned}n &= 5x + 11(5k + r) \\ &= 5(x + 11k + 2r) + r\end{aligned}$$

と表されるが、これらの $n$ はすでに $y = r$ のときに表すことができている。以上のことから、 $A$ に属する整数を小さい方から並べると

$$0, 5, 10, 11, 15, 16, 20, 21, 22, 25, \cdots$$

となり、

$$\begin{aligned}3 \text{ 番目のものは } &10 \\ 4 \text{ 番目のものは } &11 \\ 9 \text{ 番目のものは } &22\end{aligned}$$

である。また、 $A$ には39が含まれずかつ40以上の整数がすべて含まれるので、 $n \geq m$ を満たす整数 $n$ がすべて $A$ の要素になるような整数 $m$ のうち最小のものは40である。

## 〔Ⅱ〕

$$(1) \text{ あ } 0 < a < \frac{500}{27} \quad (2) \text{ い } 5 \quad (3) \text{ う } x = -1, 3 \pm \sqrt{3}$$

## 〔解説〕

(1)

$f(x) = x^3 - 5x^2 + a$  とおく。このとき  $f(x)$  が 3 次式であることから

「方程式  $f(x) = 0$  が 3 つの実数解をもつ」

$\Leftrightarrow$  「 $y = f(x)$  が 2 つの極値をもち、その正負が異なる」

である。ここで

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 10x \\ &= 3x \left( x - \frac{10}{3} \right) \end{aligned}$$

であるので、 $y = f(x)$  は  $a$  の値によらず 2 つの極値をもつことがわかる。2 つの極値の正負が異なるとき

$$\begin{aligned} f(0)f\left(\frac{10}{3}\right) &< 0 \\ \Leftrightarrow a \left\{ \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{10}{3}\right)^2 + a \right\} &< 0 \\ \Leftrightarrow a \left( a - \frac{500}{27} \right) &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 < a < \frac{500}{27} \end{aligned}$$

が成り立つ。これが求める  $a$  の条件である。

(2)

$n$  を方程式  $f(x) = 0$  の整数解であるとする

$$a = n^2(5 - n)$$

が成り立つことから、 $a$  は整数である。さらに(1)の結果も考えると、 $18 < \frac{500}{27} < 19$  より

$$a = 1, 2, \dots, 18$$

である。

$$n \leq -2 \text{ のとき } a \geq 28,$$

$$n = -1 \text{ のとき } a = 6,$$

$$n = 0 \text{ のとき } a = 0,$$

$$n = 1 \text{ のとき } a = 4,$$

$$n = 2 \text{ のとき } a = 12,$$

$$n = 3 \text{ のとき } a = 18,$$

$$n = 4 \text{ のとき } a = 16,$$

$$5 \leq n \text{ のとき } a \leq 0$$

より、3 つの実数解の中に整数が含まれるような  $a$  は全部で 5 個 ( $a = 4, 6, 12, 16, 18$ ) であることがわかる。

(3)

$a = 6$  のとき

$$x^3 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 6x + 6) = 0$$

$$\therefore x = -1, 3 \pm \sqrt{3}$$

である。

〔Ⅲ〕

$$\text{え} \quad y = -\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p} \quad \text{お} \quad \left( \frac{2pq}{p+q}, \frac{2}{p+q} \right) \quad \text{か} \quad \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} - \log t$$

$$\text{き} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} - 1 \right)^2 \quad \text{く} \quad \text{増加する} \quad \text{け} \quad y = \frac{8}{9x}$$

〔解説〕

(1)

$y = \frac{1}{x}$  のとき  $y' = -\frac{1}{x^2}$  であるから、 $\ell_p$  の方程式を求めると

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{p} &= -\frac{1}{p^2}(x-p) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p} \end{aligned}$$

となる。同様に  $\ell_q$  の方程式は

$$y = -\frac{1}{q^2}x + \frac{2}{q}$$

となる。これらの交点の  $x$  座標は、 $p \neq q$  に注意すると

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p} &= -\frac{1}{q^2}x + \frac{2}{q} \\ \Leftrightarrow \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right)x &= 2 \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \\ \Leftrightarrow (q^2 - p^2)x &= 2pq(q-p) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2pq}{p+q} \end{aligned}$$

とわかる。これを  $\ell_p$  に代入すると

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{p^2} \frac{2pq}{p+q} + \frac{2}{p} \\ &= \frac{2}{p+q} \end{aligned}$$

となるので、交点  $R$  の座標は  $\left( \frac{2pq}{p+q}, \frac{2}{p+q} \right)$  とわかる。また、線分  $PQ$  と曲線  $C$  によって囲

まれた図形の面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \times (q-p) - \int_p^q \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{q^2 - p^2}{2pq} - [\log x]_p^q \\ &= \frac{q}{2p} - \frac{p}{2q} - \log \frac{q}{p} \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} - \log t \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} - 1 \right)^2 \end{aligned}$$

である。これは  $t > 1$  において常に正となる。したがって  $S$  は区間  $t > 1$  において増加する関数

である。 $S = S_0$  のとき  $t = 2$  すなわち  $q = 2p$  であるので、このとき  $R \left( \frac{4p}{3}, \frac{2}{3p} \right)$  となる。よっ

て、点  $R$  は方程式  $y = \frac{8}{9x}$  で表される曲線の第 1 象限内の部分を動くことがわかる。

〔Ⅳ〕

(1)

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} &= ab + (a^2 - 2a)(b^2 - 2b) \\ &= ab + ab(a-2)(b-2) \\ &= ab + ab\{ab - 2(a+b) + 4\} \\ &= t + t(t-2s+4) \\ &= t(t-2s+5)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} = t(t-2s+5)$$

(2)

$\angle \mathrm{AOB} = 90^\circ$  のとき  $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} = 0$  であるので、(1)の結果を用いると

$$t(t-2s+5) = 0$$

となる。ここで、 $a \neq 0$  かつ  $b \neq 0$  より  $t \neq 0$  なので

$$\begin{aligned}t-2s+5 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 2s-5\end{aligned}$$

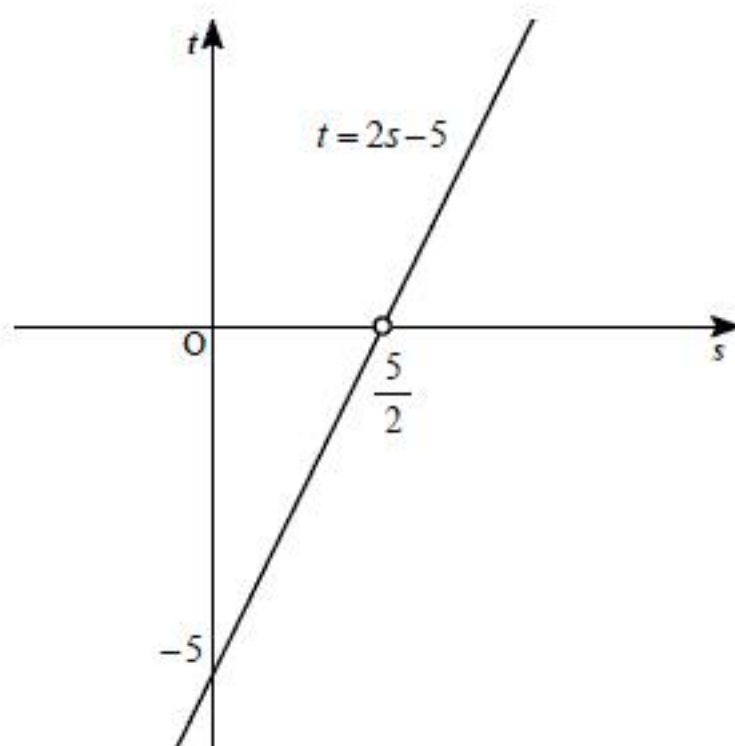
となる。ここで、A, B の  $x$  座標は  $x^2 - sx + t = 0$  の異なる 2 つの実数解となることから、この方程式の判別式を  $D$  とおくと

$$\begin{aligned}D &= s^2 - 4t > 0 \\ \Leftrightarrow t &< \frac{s^2}{4}\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}\frac{s^2}{4} - (2s-5) &= \frac{1}{4}(s^2 - 8s + 20) \\ &= \frac{1}{4}\{(s-4)^2 + 4\} > 0\end{aligned}$$

となるので、 $t = 2s-5$  はすべての範囲で  $t < \frac{s^2}{4}$  を満たす。以上から点  $(s, t)$  が描く図形は以下のようなになる。



(答) 上図

(3)

$a \neq b$  に注意して直線 AB の方程式を求めると、

$$\begin{aligned}y - (a^2 - 2a) &= \frac{(a^2 - 2a) - (b^2 - 2b)}{a - b}(x - a) \\ \Leftrightarrow y - (a^2 - 2a) &= \frac{(a-b)(a+b-2)}{a-b}(x - a) \\ \Leftrightarrow y &= (a+b-2)x - ab\end{aligned}$$

となる。 $a+b=s$ ,  $ab=t$  を代入してから、 $t=2s-5$  であることを考えると

$$\begin{aligned}y &= (s-2)x - 2s+5 \\ \Leftrightarrow (x-2)s - 2x - y + 5 &= 0\end{aligned}$$

とわかる。

$$\begin{aligned}\begin{cases} x-2=0 \\ -2x-y+5=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}\end{aligned}$$

であるから、直線 AB は定点  $(2, 1)$  を通る。

(答)  $(2, 1)$