

[I]

[解答]

$$\boxed{101} \quad 50(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

[解説]

$$\angle ACB = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ$$

であることから、正弦定理より

$$\begin{aligned} \frac{BC}{\sin 30^\circ} &= \frac{100}{\sin 75^\circ} \\ \Leftrightarrow BC &= \frac{50}{\sin 75^\circ} \end{aligned}$$

とわかる。

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

と求まるので、

$$\begin{aligned} BC &= 50 \cdot \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \\ &= 50(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

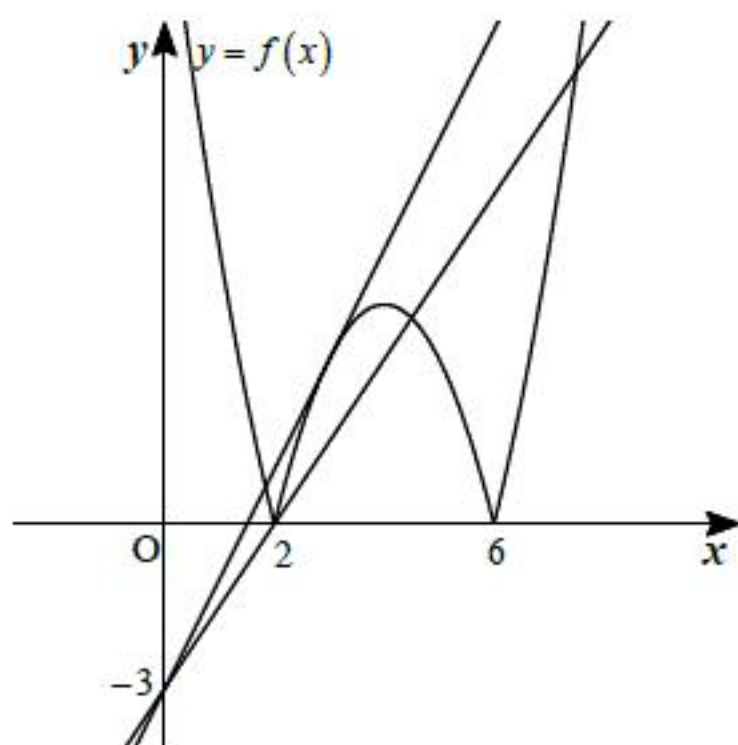
〔解答〕

① G

〔解説〕

$f(x)=|(x-2)(x-6)|$ とおく。与えられた方程式が相異なる 4 つの実数解をもつとき、

$y=f(x)$ と $y=ax-3$ のグラフは相異なる 4 つの交点をもつ。相異なる 4 つの交点をもつには、直線 $y=ax-3$ の傾きが下のグラフ中の 2 直線の傾きの間の値をとらなければならない。



まず、上のグラフ中で傾きの値が小さい直線について考える。この直線は点 $(2, 0)$ を通るので

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 2 - 3 \\ \therefore a &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

とわかる。次に、傾きの値が大きい直線について考える。この直線は $2 < x < 6$ の範囲で $y=f(x)$ に接している。この接点の x 座標を t とおくと、接線の方程式は

$$y - (-t^2 + 8t - 12) = (-2t + 8)(x - t)$$

とおける。これに $x=0, y=-3$ を代入すると

$$\begin{aligned} -3 - (-t^2 + 8t - 12) &= (-2t + 8) \cdot (-t) \\ \Leftrightarrow t^2 &= 9 \\ \therefore t &= 3 \quad (\because 2 < t < 6) \end{aligned}$$

とわかるので、このとき

$$a = -2 \cdot 3 + 8 = 2$$

である。以上のことから、求める a の値の範囲は

$$\frac{3}{2} < a < 2$$

である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

② F ③ H ④ D

〔解説〕

与えられた等式より

$$2\overrightarrow{AP} + 3(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + 4(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{7}{9} \cdot \frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{7}$$

と変形できるから、点Qは線分BCを4:3に内分し、点Pは線分AQを7:2に内分することがわかる。よって

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AP} = \frac{7}{9}\overrightarrow{PQ}$$

である。また、

$$\triangle PAB = \triangle ABC \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{9} = \frac{4}{9} \triangle ABC$$

であるから

$$\triangle ABC : \triangle PAB = 9 : 4$$

と求まる。

[IV]

[解答]

5 B 6 D 7 E 8 C

[解説]

$$0 \leq x \leq \log_2 n \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq n$$

であるから、 $n=4$ のときは

$$1 \leq 2^x \leq 4$$

となる。これを満たす整数 x は $x=0, 1, 2$ であるから、 $a_4=3$ と求まる。 $a_n=5$ となるための n の条件は

$$2^4=16 \leq n < 32=2^5$$

$$\therefore 16 \leq n \leq 31$$

である。また、

$$1 \leq 2^x \leq 2013$$

$$2^{10}=1024 < 2013 < 2048=2^{11}$$

より $a_{2013}=11$ である。

[V]

[解答]

$$\boxed{102} \quad \frac{91}{216} \quad \boxed{9} \quad \text{B}$$

[解説]

(1)

$n > 3$ となるのは 3 回目まで 6 が出ない場合であり、その確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

である。したがって、求める確率は

$$1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

である。

(2)

6 個の○を一行に並べ、両端を除く 5 箇所の○と○の間に棒|を差し込むことを考える。両端あるいは棒|にはさまれた○をひとつの塊と考え、左から順に塊に含まれる○の個数を数える。

$$\bigcirc | \bigcirc \bigcirc | \bigcirc \bigcirc \bigcirc$$

上記のように棒を差し込んだ場合は 1, 2, 3 となる。このような棒の差し込み方と条件を満たす目の出方とが 1 対 1 に対応するが、棒を差し込まない場合は条件を満たさないことに注意すると、求める場合の数は

$$2^5 - 1 = 31 \text{ [通り]}$$

である。

〔VI〕

〔解答〕

10 C 11 C

〔解説〕

(1)

 $t=0$ のとき

$$y = \begin{cases} -7500x^2 + 300 & (0 \leq x \leq 0.2 \text{ のとき}) \\ 0 & (0.2 < x \leq 5 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるので、このときのグラフはアである。 $t=0.5$ のときは

$$y = \begin{cases} 300 & (0 \leq x \leq 0.4 \text{ のとき}) \\ -7500(x-0.4)^2 + 300 & (0.4 < x \leq 0.6 \text{ のとき}) \\ 0 & (0.6 < x \leq 5) \end{cases}$$

となるので、このときのグラフはエである。

(2)

 $t=0.8$ のとき

$$y = \begin{cases} 300 & (0 \leq x \leq 0.64 \text{ のとき}) \\ -7500(x-0.64)^2 + 300 & (0.64 < x \leq 0.84 \text{ のとき}) \\ 0 & (0.84 < x \leq 5) \end{cases}$$

となる。

$$\begin{aligned} 300 \times 0.64 + \int_{0.64}^{0.84} \{-7500(x-0.64)^2 + 300\} dx &= 192 + \left[-2500(x-0.64)^3 + 300x \right]_{0.64}^{0.84} \\ &= 192 - 20 + 300 \cdot 0.2 \\ &= 232 \end{aligned}$$

であるから、含まれる水の総量は232kgとわかる。