

【Ⅰ】

【解答】

- (1) 最大 ㉔ 最小 ㉑ (2) 最大 ㉔ 最小 ㉑
(3) 最大 ㉑ 最小 ㉔ (4) 最大 ㉔ 最小 ㉑
(5) 最大 ㉑ 最小 ㉔ (6) 最大 ㉑ 最小 ㉑
(7) 最大 ㉑ 最小 ㉑ (8) 最大 ㉑ 最小 ㉔
(9) 最大 ㉑ 最小 ㉑ (10) 最大 ㉑ 最小 ㉑

【解説】

- (1) ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ を用いると
 ${}_{101}C_{51} = {}_{101}C_{50} \cdot {}_{102}C_{52} = {}_{102}C_{50}$
となる。したがって
 ${}_{100}C_{50} < {}_{101}C_{51} < {}_{102}C_{52}$
となる。

- (2)
$$\begin{aligned}\tan 60^\circ &= \sqrt{3} \\ &= 3^{\frac{1}{2}} \\ 3^{0.6} &= 3^{\frac{3}{5}} \\ &= \sqrt[5]{3^3} \\ &= \sqrt[5]{27} \\ &< \sqrt[5]{3 \cdot 3 \cdot 3} \\ &= \sqrt[5]{27} \\ &< 2 \\ &< \log_2 5\end{aligned}$$

となるので
 $\tan 60^\circ < 3^{0.6} < \log_2 5$
となる。

- (3) このとき $AB=AC=a$, $BC=\sqrt{3}a$ とおける。また $\angle A=120^\circ$ である。よって
$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= a \cdot a \cdot \cos 120^\circ \\ &= -\frac{a^2}{2} \\ \overline{BA} \cdot \overline{BC} &= a \cdot \sqrt{3}a \cdot \cos 30^\circ \\ &= \frac{3a^2}{2} \\ \overline{BC} \cdot \overline{CA} &= a \cdot \sqrt{3}a \cdot \cos 150^\circ \\ &= -\frac{3a^2}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって
 $\overline{BC} \cdot \overline{CA} < \overline{AB} \cdot \overline{AC} < \overline{BA} \cdot \overline{BC}$
となる。

- (4) 円に内接する四角形の性質と、円周角の定理より
$$\begin{aligned}\angle C &= 180^\circ - 130^\circ \\ &= 50^\circ \\ \angle BOD &= 2 \cdot 50^\circ \\ &= 100^\circ\end{aligned}$$

である。したがって
$$\begin{aligned}\sin A &= \sin 50^\circ \\ \cos C &= \cos 50^\circ \\ &= \sin 40^\circ \\ \sin \angle BOD &= \sin 100^\circ \\ &= \sin 80^\circ\end{aligned}$$

となる。したがって
 $\cos C < \sin A < \sin \angle BOD$

となる。

- (5)
$$\begin{aligned}z &= \frac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} \\ &= i\end{aligned}$$

であるので z の実部、 z の虚部、 z^2 の実部はそれぞれ 0, 1, -1 である。したがって

$(z^2 \text{ の実部}) < (z \text{ の実部}) < (z \text{ の虚部})$

となる。

- (6) 初項から第 n 項までの和を S_n と表す。数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}S_{100} &= S_{99} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{99} < S_{99} \\ S_{101} &= S_{99} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{99} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{100} \\ &= S_{99} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{99}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$S_{100} < S_{101} < S_{99}$$

となる。

- (7) 円が点 (3, 4) を通るので円の方程式は

$$\begin{aligned}c^2 &= 3^2 + 4^2 = 25 \\ \therefore c &= 5\end{aligned}$$

となる。よって点 (3, 4) における円の接線の方程式は

$$\begin{aligned}3x + 4y &= 25 \\ \therefore y &= -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$a = -\frac{3}{4}, b = \frac{25}{4}$$

となる。これより

$$a < c < b$$

となる。

- (8) $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。 $x=1$ における接線の傾きが 7 であることより

$$\begin{aligned}f'(1) &= 7 \\ \therefore 2a + b &= 7\end{aligned}$$

となる。また、 $x=-1$ における接線の傾きが -1 であることより

$$\begin{aligned}f'(-1) &= -1 \\ \therefore -2a + b &= -1\end{aligned}$$

となる。したがって

$$a = 2, b = 3$$

となる。よって $x=1$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= 7(x-1) + f(1) \\ \therefore y &= 7x + c - 2\end{aligned}$$

となる。よってこの直線の y 切片が -1 であることより

$$\begin{aligned}c - 2 &= -1 \\ \therefore c &= 1\end{aligned}$$

となる。よって

$$c < a < b$$

となる。

- (9) 「 $m+n$ が偶数」であるための十分条件であるのは「 m, n はともに偶数」と「 m, n はともに奇数」の 2 つである。「 $m+n$ が奇数」であるための十分条件であるものはない。また「 mn は偶数」であるための必要条件であるのは「 m または n は偶数」の 1 つである。したがって

$$\textcircled{B} < \textcircled{C} < \textcircled{A}$$

となる。

- (10) ㉑ の場合、100 円をもらえる確率は $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{1000}$ であるので、賞金の期待値 E_A は

$$\begin{aligned}E_A &= 100 \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{1000} \right\} \\ &= 100 - 100 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{1000}\end{aligned}$$

となる。㉒ の場合、最後まで 1, 2 が出ない確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^{1000}$ であるので、1000 回目までに 1 また

は 2 のいずれかが出る確率は $1 - \left(\frac{4}{6}\right)^{1000} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{1000}$ である。よって対称性より 1 のほうが 2 よりも先に出る確率は

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{1000} \right\}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}E_B &= 300 \cdot \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{1000} \right\} \\ &= 150 - 150 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{1000}\end{aligned}$$

となる。㉓ の場合、㉒ の場合と同様に考えると賞金の期待値は

$$\begin{aligned}E_B &= 500 \cdot \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{1000} \right\} \\ &= 125 - 125 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1000}\end{aligned}$$

となる。 $\left(\frac{5}{6}\right)^{1000}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{1000}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{1000}$ はいずれも十分小さいので以上より

$$E_A < E_C < E_B$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

$$(1) \quad \varphi(15)=8 \quad (2) \quad \varphi(p)=p-1 \quad (3) \quad 5, 8, 10, 12 \quad (4) \quad 997 \quad (5) \quad p^{k-1}$$

〔解説〕

(1)

15=3・5であるので15と互いに素であるのは1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14の8つである。したがって

$$\varphi(15)=8$$

となる。

(2)

素数 p と互いに素であるのは1, 2, ..., $p-1$ の $p-1$ 個の整数である。したがって

$$\varphi(p)=p-1$$

となる。

(3)

$1 \leq p \leq 15$ の素数のうち $\varphi(p)=4$ を満たすのは、(2)の結果より $p=5$ のみである。 $\varphi(n)=4$ であるためには $n \geq 4$ が必要なので $4 \leq n \leq 15$ を満たす合成数について $\varphi(n)$ を調べると

$$\varphi(4)=3, \varphi(6)=2, \varphi(8)=4, \varphi(9)=6, \varphi(10)=4, \varphi(12)=4, \varphi(14)=6, \varphi(15)=8$$

となる。したがって $\varphi(n)=4$ を満たすのは5, 8, 10, 12の4つである。

(4)

1000以下の最大の素数は997であり(2)の結果より $\varphi(997)=996$ である。

$n=1000, 999, 998, 996$ はいずれも $\varphi(n) < 996$ であり $n < 996$ のとき $\varphi(n) < 997$ であるので1000以下 n で $\varphi(n)$ を最大にするのは997である。

(5)

1から p^k までの数の中で p^k と互いに素でない、すなわち p^k と1より大きな公約数を持つような数は

$$p, 2p, 3p, \dots, p^{k-1} \cdot p$$

の p^{k-1} 個である。したがって p^k と互いに素な数は

$$\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

$$(1) \quad (2, 0), (-1, 3) \quad (2) \quad S = \frac{9}{2}$$

(3)

直線 $y = ax$ と直線 $y = -x + 2$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} ax &= -x + 2 \\ \therefore x &= \frac{2}{a+1} \end{aligned}$$

である。ここで $O(0, 0)$, $A\left(\frac{2}{a+1}, \frac{2a}{a+1}\right)$, $B(2, 0)$ とおく。△OAB の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2a}{a+1} = \frac{2a}{a+1}$$

である。また放物線 $y = x^2 - 2x$ と x 軸で囲まれた領域の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^2 \{-x(x-2)\} dx &= \frac{1}{6} \cdot 2^3 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって直線 $y = ax$ によって題意の図形の面積が 2 等分されるための条件は

$$\begin{aligned} \frac{2a}{a+1} + \frac{4}{3} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \\ \therefore a &= \frac{11}{13} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{11}{13}$$

〔解説〕

(1)

直線と放物線の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= -x + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x+1) &= 0 \\ \therefore x &= 2, -1 \end{aligned}$$

となる。したがって交点の座標は

$$(2, 0), (-1, 3)$$

となる。

(2)

(1)の結果より

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(-x+2) - (x^2-2x)\} dx \\ &= -\int_{-1}^2 (x-2)(x+1) dx \\ &= \frac{1}{6} \{2 - (-1)\}^3 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

$$(1) \quad AH = \frac{\sqrt{6}}{3}a \quad (2) \quad \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

(3)

内接する球の半径を O とすると、四面体 $ABCD$ は 4 つの合同な四面体

$OABC, OBCD, OCDA, ODAB$ に分割できる。内接球の半径を r とするとそれぞれの体積は

$$\frac{1}{3} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2r$$

となる。したがって四面体 $ABCD$ の体積について

$$\frac{\sqrt{2}a^3}{12} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}a^2r$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{6}a}{12}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{\sqrt{6}a}{12}$$

〔解説〕

(1)

対称性より点 H は $\triangle BCD$ の重心である。2 点 C, D の中点を M とすると、重心の性質より

$$BH : HM = 2 : 1$$

である。したがって

$$BM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

より

$$\begin{aligned} BH &= \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}a \end{aligned}$$

となる。したがって直角三角形 ABH において三平方の定理より

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}a \end{aligned}$$

となる。

(2)

$\triangle BCD$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \end{aligned}$$

となる。したがって(1)の結果より求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \end{aligned}$$

となる。