

[I]

〔解答〕

- (1) ア 1 イ 4
 (2) ウ 2 エ 5
 (3) オ 2 カ 3 キ 3

〔解説〕

(1)

$\int_0^1 f(t) dt = A, \int_0^1 g(t) dt = B$ とおくと, $f(x) = 8x + B, g(x) = Ax^2 - 4x$ であることから

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f(t) dt \\ &= \int_0^1 (8t + B) dt \\ &= \left[4t^2 + Bt \right]_0^1 \\ &= B + 4 \\ B &= \int_0^1 g(t) dt \\ &= \int_0^1 (At^2 - 4t) dt \\ &= \left[\frac{1}{3} At^3 - 2t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} A - 2 \end{aligned}$$

とわかる。これらの式から $A = 3, B = -1$ と求まるので, $f(x) = 8x - 1, g(x) = 3x^2 - 4x$ である。
 ゆえに

$$\begin{aligned} \int_0^2 (f(t) - 2g(t)) dt &= \int_0^2 (-6t^2 + 16t - 1) dt \\ &= \left[-2t^3 + 8t^2 - t \right]_0^2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

とわかる。

(2)

C_2 の式を

$$x^2 = -2y + b$$

と変形し, これを C_1 の式に代入すると

$$y^2 - 2y - a^2 + b = 0$$

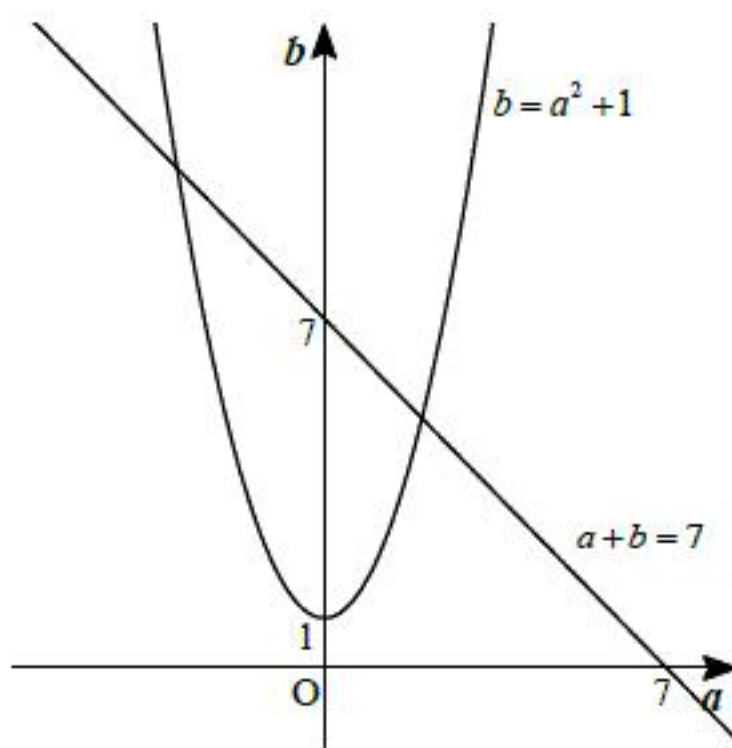
となる。 C_1 と C_2 が共有点を持つためにはこの式が実数解をもつことが必要であるから, 判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-1)^2 - (-a^2 + b) \\ &= a^2 - b + 1 \end{aligned}$$

より

$$D \geq 0 \Leftrightarrow b \leq a^2 + 1$$

である。これと $a + b \leq 7, a > 0, b > 0$ をすべて満たすとき, b が最大になるのは $a + b = 7$ と $b = a^2 + 1$ が交わるときである。



$$\begin{aligned} a^2 + 1 &= -a + 7 \\ \Leftrightarrow a^2 + a - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - 2)(a + 3) &= 0 \end{aligned}$$

であることから, b が最大となるのは $a = 2, b = 5$ のときである。また, このとき確かに C_1 と C_2 が共有点を持つ。

(3)

問題文より, $XA = 3a$ (ただし $a > 0$) とおくと $XB = 2a$ である。塔 A の高さは

$$XA \cdot \tan 45^\circ = 3a$$

であり, 同様に塔 B の高さは

$$XB \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}a$$

である。よって, 塔 B の高さは塔 A の高さの

$$\frac{2\sqrt{3}a}{3a} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ [倍]}$$

とわかる。

[Ⅱ]

〔解答〕

- (1) ア ⑧ (2) イ ⑦
 (3) ウ ⑦ (4) エ ③ オ ⑨
 (5) カ ③ キ ③ ク ③

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}\cos 2C &= 2\cos^2 C - 1 \\ &= 2x^2 - 1\end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}\cos(X+Y) + \cos(X-Y) &= 2\cos\frac{(X+Y)+(X-Y)}{2}\cos\frac{(X+Y)-(X-Y)}{2} \\ &= 2\cos X\cos Y\end{aligned}$$

である。

(3)

(2)の式で $X = A+B$, $Y = A-B$ とすれば

$$\begin{aligned}\cos 2A + \cos 2B &= 2\cos(A+B)\cos(A-B) \\ &= 2\cos(180^\circ - C)\cos(A-B) \\ &= -2\cos C\cos(A-B) \\ &= -2tx\end{aligned}$$

とわかる。

(4)

$$\begin{aligned}a &= \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \\ &= -2tx + 2x^2 - 1\end{aligned}$$

である。ここで $A+B+C=180^\circ$, $A \geq B \geq C$ より

$$\begin{aligned}180^\circ &= A+B+C \geq C+C+C = 3C \\ \therefore C &\leq 60^\circ\end{aligned}$$

である。よって $\frac{1}{2} \leq x < 1$ より, a は t が最大のときに最小となる。 $0 \leq A-B < 180^\circ$ より,

$t=1$ (このとき $A-B=0$)のときに a は最小となり, そのとき $a = 2x^2 - 2x - 1$ である。

(5)

$t=1$ のもとで

$$\begin{aligned}a &= 2x^2 - 2x - 1 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

である。 $\frac{1}{2} \leq x < 1$ より, $x = \frac{1}{2}$ すなわち $C = 60^\circ$ のとき a は最小となる。また $t=1$ のとき

$A=B$ であることから $A=B=60^\circ$ である。

[Ⅲ]

〔解答〕

- (1) ア 8 イ 7 ウ 4 エ 9
 (2) オ 8 カ 7 キ 7 ク 6 ケ 4 コ 9
 (3) サ 8 シ 7 ス 7 セ 5 ソ 0 タ 2
 チ 1 ツ 5
 (4) テ 3 ト 4 ナ 9

※ r の値によって、「ス」には「8」もあてはまる。

〔解説〕

(1)

$r=0$ のとき

$$7a-8b=0 \Leftrightarrow 7a=8b$$

である。 7 と 8 は互いに素であるから

$$(a, b) = (8n, 7n)$$

と表せる。ただし、 a, b は自然数であることから n も自然数である。

$$\begin{aligned} a+b &< 750 \\ \Leftrightarrow 8n+7n &< 750 \\ \Leftrightarrow n &< 50 \end{aligned}$$

であることも考えると、 $n=1, 2, \dots, 49$ である。

(2)

$r=1$ の場合を考える。

$$\begin{aligned} 7a-8b &= 1 \\ 7 \cdot 7 - 8 \cdot 6 &= 1 \end{aligned}$$

より、辺々引くと

$$\begin{aligned} 7(a-7) - 8(b-6) &= 0 \\ \Leftrightarrow 7(a-7) &= 8(b-6) \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} a-7 &= 8n, b-6 = 7n \\ \therefore (a, b) &= (8n+7, 7n+6) \end{aligned}$$

となる。ただし、 a, b は自然数であることから n は 0 以上の整数である。

$$\begin{aligned} a+b &< 750 \\ \Leftrightarrow (8n+7) + (7n+6) &< 750 \\ \Leftrightarrow n &< \frac{737}{15} \end{aligned}$$

であることも考えると、 $n=0, 1, 2, \dots, 49$ である。

(3)

$$\begin{aligned} 7a-8b &= r \\ 7 \cdot (-r) - 8 \cdot (-r) &= r \end{aligned}$$

より、辺々引くと

$$\begin{aligned} 7(a+r) - 8(b+r) &= 0 \\ \Leftrightarrow 7(a+r) &= 8(b+r) \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} a+r &= 8n, b+r = 7n \\ \therefore (a, b) &= (8n-r, 7n-r) \end{aligned}$$

となる。ただし、 a, b は自然数であることから n は

$$n > \frac{r}{8} \text{ かつ } n > \frac{r}{7} \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす整数である。また $a+b < 750$ であるから、 n は

$$\begin{aligned} (8n-r) + (7n-r) &< 750 \\ \Leftrightarrow n &< 50 + \frac{2}{15}r \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を満たす整数である。①と②から

$$\begin{aligned} -6000 < r \leq 0 \text{ のとき } \frac{r}{8} &< n < 50 + \frac{2}{15}r \\ 0 < r < 5250 \text{ のとき } \frac{r}{7} &< n < 50 + \frac{2}{15}r \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

であり、 r がこれら以外の範囲にあるとき n は存在しない。

※(4)の内容を考えて、解答欄には不等式 $\frac{r}{7} < n < 50 + \frac{2}{15}r$ に相当する数字を正答とした。

(4)

$14a-15b \leq 700$ に $a=8n-r, b=7n-r$ を代入すると

$$\begin{aligned} 14(8n-r) - 15(7n-r) &\leq 700 \\ \Leftrightarrow n &\leq -\frac{r}{7} + 100 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。 $0 < r < 5250$ のとき、集合 $B \cap A(r)$ が空集合でないための必要条件は

$$\begin{aligned} \frac{r}{7} &< -\frac{r}{7} + 100 \\ \Leftrightarrow r &< 350 \end{aligned}$$

である。ここで $r=349$ とすると、 $n=50$ が③と④を同時に満たす。よって、求める r の値は $r=349$ である。