

〔Ⅰ〕

〔解答〕

(1)

ア 0 イ 3

(2)

ウ 6

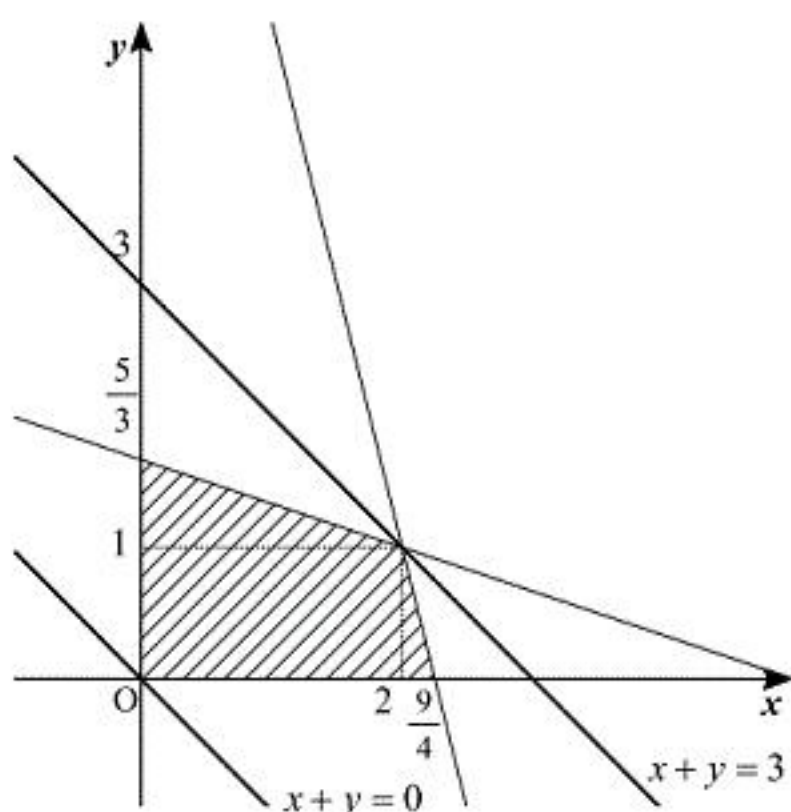
〔解説〕

(1)

連立不等式

$$x+3y \leq 5, 4x+y \leq 9, x \geq 0, y \geq 0$$

を満たす領域は下図の斜線部分である（境界上の点を含む）。



$$x+y=k (\Leftrightarrow y=-x+k) \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおくと、①は傾き -1 で y 切片 k の直線を表す。 (x, y) が連立不等式を満たすとき k は、①と上図斜線部が共有点を持つような範囲の値をとりうる。よって k は①が点 $(0, 0)$ を通るとき最小、点 $(2, 1)$ を通るとき最大となる。したがって、 $k = x+y$ の最小値は 0 、最大値は 3 である。

(2)

$$t = \sqrt{x}$$

とおくと、

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$$

x	a	$\rightarrow$	b
t	$\log 2$	$\rightarrow$	$\log 5$

より、

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx &= \int_{\log 2}^{\log 5} 2e^t dt \\ &= [2e^t]_{\log 2}^{\log 5} \\ &= 2 \cdot (5-2) \\ &= 6 \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

$$(1) \quad \text{コ} \qquad \qquad \frac{2}{3} \qquad \qquad \text{サ} \qquad \qquad \frac{19}{36}$$

$$(2) \quad \text{シ} \qquad \qquad \frac{5}{12} p_{n-1} + \frac{1}{4}$$

$$(3) \quad \text{ス} \qquad \frac{5}{21} \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{3}{7} \qquad \text{セ} \qquad \qquad \frac{3}{7}$$

〔解説〕

(1)

はじめに点 P は A にあるので,

$$p_1 = \frac{2}{3}$$

である。また、2 回の操作の後に点 P が A にあるのは、 $A \rightarrow A \rightarrow A$ または $A \rightarrow B \rightarrow A$ と移動した場合なので

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 \times \frac{2}{3} + (1 - p_1) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{19}{36} \end{aligned}$$

となる。

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} \times \frac{2}{3} + (1 - p_{n-1}) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{12} p_{n-1} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

(3)

(2)より,

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{5}{12} p_{n-1} + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow p_n - \frac{3}{7} &= \frac{5}{12} \left(p_{n-1} - \frac{3}{7} \right) \end{aligned}$$

と表すことができる。よって、数列 $\left\{ p_n - \frac{3}{7} \right\}$ は、公比 $\frac{5}{12}$ の等比数列であり、

$$\begin{aligned} p_n - \frac{3}{7} &= \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} \cdot \left(p_1 - \frac{3}{7} \right) \\ &= \frac{5}{21} \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$p_n = \frac{5}{21} \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{3}{7}$$

と求まる。したがって、 $0 < \frac{5}{12} < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} = 0$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{3}{7}$$

となる。

[IV]

[1] $n=1$ のとき

①について

$$(\text{左辺}) = 1^2 = 1$$

$$(\text{右辺}) = \frac{(-1)^0 \cdot 1 \cdot 2}{2} = 1$$

となり、①が成立する。

[2] $n=k$ のとき①が成り立つと仮定する。この仮定を用いると

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 + \cdots + (-1)^k (k+1)^2 &= 1^2 - 2^2 + \cdots + (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^k (k+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^{k-1} k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^k (k+1) \{-k + 2(k+1)\}}{2} \\ &= \frac{(-1)^k (k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

より、 $n=k+1$ のとき①が成り立つことが示された。

以上[1], [2]から数学的帰納法により、①が成り立つことが示された。

(証明終)

〔V〕

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (-2\cos\theta, 0, -2\sin\theta)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = (2\cos\theta, 0, 2\sin\theta)$$

である。点 A は、 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 上にあるので、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = k(-2\cos\theta, 0, -2\sin\theta)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PA}} \\ &= (\cos\theta, \sin\theta, \sin\theta) + k(-2\cos\theta, 0, -2\sin\theta) \\ &= ((1-2k)\cos\theta, \sin\theta, (1-2k)\sin\theta)\end{aligned}$$

と表せる。ここで点 A は $x=t$ 上の点であり、 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta\neq 0$ であるから、

$$\begin{aligned}(1-2k)\cos\theta &= t \\ \Leftrightarrow k &= \frac{\cos\theta-t}{2\cos\theta}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= ((1-2k)\cos\theta, \sin\theta, (1-2k)\sin\theta) \\ &= (t, \sin\theta, t\tan\theta)\end{aligned}$$

と求まる。同様に、点 B は、 $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ 上にあるので、実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{RB}} = s(2\cos\theta, 0, 2\sin\theta)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} + \overrightarrow{\mathrm{RB}} \\ &= (-\cos\theta, -\sin\theta, -\sin\theta) + s(2\cos\theta, 0, 2\sin\theta) \\ &= ((2s-1)\cos\theta, -\sin\theta, (2s-1)\sin\theta)\end{aligned}$$

と表せる。よって、 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta\neq 0$ であるから、

$$\begin{aligned}(2s-1)\cos\theta &= t \\ \Leftrightarrow s &= \frac{t+\cos\theta}{2\cos\theta}\end{aligned}$$

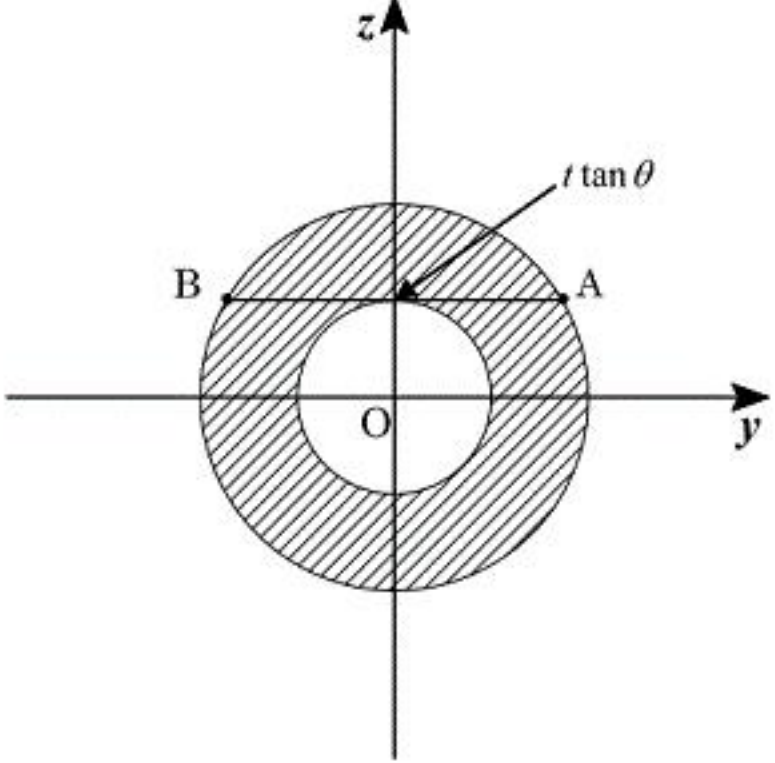
となるので、

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (t, -\sin\theta, t\tan\theta)$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \mathrm{A}(t, \sin\theta, t\tan\theta), \quad \mathrm{B}(t, -\sin\theta, t\tan\theta)$$

(2)



$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より、 $\sin\theta>0$ であるから、 $x=t$ による断面図は上図のようになる。求める面積は、

上図において線分 AB を原点中心に 1 回転させたときの通過面積であり、上図斜線部の面積に等しい。

ここで、三平方の定理より、

$$\mathrm{OA} = \sqrt{(t\tan\theta)^2 + \sin^2\theta}$$

である。よって、求める面積を $S(t)$ とすると、

$$S(t) = \pi\left\{(\mathrm{OA})^2 - (t\tan\theta)^2\right\} = \pi\sin^2\theta$$

となる。 θ は t の関数でないことから、 $S(t)$ は t によらない。

(証明終)

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned}V &= \int_{-\cos\theta}^{\cos\theta} S(t) dt \\ &= \int_{-\cos\theta}^{\cos\theta} \pi\sin^2\theta dt \\ &= 2\pi\sin^2\theta\cos\theta\end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad 2\pi\sin^2\theta\cos\theta$$

(4)

(3)より、

$$V = 2\pi(1-\cos^2\theta)\cos\theta$$

となる。ここで、 $\cos\theta=k$ とおくと、 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より、

$$0 < k < 1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

であり、

$$\begin{aligned}V &= 2\pi(1-k^2)k \\ &= 2\pi(k-k^3)\end{aligned}$$

$$V' = 2\pi(1-3k^2)$$

となる。よって、 $\textcircled{1}$ の範囲での増減表は以下のようになる。

k	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	1
V'		+	0	-	
V		↗		↘	

したがって、 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき、 V の最大値は、

$$\begin{aligned}V &= 2\pi\left\{\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\right\} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi\end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき、} V \text{ の最大値 } \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$$