

数 学 問 題

はじめに、これを読むこと。

1. この問題用紙は3ページまでである。ただし、ページ番号のない白紙はページ数に含まない。
2. 問題は、1ページから3ページに書かれている。それ以外のページは、計算用紙として使用してよい。
3. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認すること。
4. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
5. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークするか、または記入すること。所定欄以外のところには何も記入しない。
6. 分数形で解答する場合は、それ以上約分できない形で答えなさい。また、根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
7. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
8. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入のこと。
9. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
11. 解答用紙はすべて回収する。持ち帰らず、必ず提出しなさい。ただし、この問題用紙は、必ず持ち帰りなさい。
12. 試験時間は60分である。
13. マークの記入例

良い例	悪い例
	

※ この問題用紙は、必ず持ち帰りなさい。

〔Ⅰ〕 次の各問の に入る数値を下の表から選んでアルファベットをマークせよ。同じアルファベットを選んでもかまわない。

1. $\cos 3\theta + 2\cos\theta = 0$ を満たすとき、

$\cos\theta =$ (1) または、 $\cos\theta = \pm$ (2) である。

2. 平面上の2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が、 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ を満たし、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき、 $2\vec{a} - 3\vec{b}$ と $2\vec{a} + \vec{b}$ のなす角を θ とすれば、

$\cos\theta =$ (3)

である。また、円のベクトル方程式

$$(\vec{p} - 2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{p} - 2\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

で定まる円の半径は、 (4) である。

3. 正の実数 m について、放物線 $y = 1 - \frac{m^2}{4} - x^2$ と直線 $y = mx$ が、 $x > 0$ の範囲で共有点を持つための必要十分条件は、 (5) $> m$ である。このとき、この放物線と直線で囲まれた領域の面積は、 (6) である。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

F. 5

G. 6

H. $-\frac{3}{2}$

I. -1

J. -2

K. $-\frac{2}{3}$

L. $-\sqrt{\frac{3}{7}}$

M. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

N. $\frac{1}{2}$

O. $\sqrt{\frac{3}{7}}$

P. $\frac{4}{3}$

Q. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

R. $\frac{5}{4}$

S. $\frac{4}{5}$

T. $\sqrt{2} + \frac{1}{7}$

U. $\sqrt{5}$

V. $\frac{1}{5}$

W. $\frac{1}{10}$

X. $\frac{1}{25}$

Y. $\frac{11}{23}$

Z. $\frac{11}{32}$

〔Ⅱ〕 次のア～チに当てはまる 0～9 の数字を解答欄にマークせよ。

自然数 n について、関数 $f_n(x)$ が与えられているとき、

$a_n = \sum_{k=1}^n |f_n(k) - f_n(k-1)|$ の値を、 n に関する一次式または二次式と定める。

1. $f_n(x) = \left| \frac{3}{2}n - 3x \right|$ のとき、

n が偶数なら、 $a_n = \boxed{\text{ア}}$ n であり、

n が奇数なら、 $a_n = \boxed{\text{イ}}$ $n - \boxed{\text{ウ}}$

である。従って、 n が奇数のとき、

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} n^2 - \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる。

2. $f_n(x) = 3x(x - n)$ のとき、

n が偶数なら、 $a_n = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} n^2$ であり、

n が奇数なら、 $a_n = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} n^2 - \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$

である。従って、 n が奇数のとき、

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{4} (\boxed{\text{セ}} n^3 + \boxed{\text{ソ}} n^2 - \boxed{\text{タ}} n - \boxed{\text{チ}})$$

となる。

〔Ⅲ〕 n を自然数とすると、1 から $2n$ までの番号がそれぞれ付いた $2n$ 枚のカードを使って次のゲームを行う。

番号が分からない状態で、カードを1枚引いて、引いたカードの番号が、奇数ならそこでゲームは終了し、偶数なら引いたカードを除いて、残りのカードでゲームを続ける。これを奇数の番号のカードがでるまで続ける。終了するまでに引いたすべてのカードの番号の合計が得点となる。

1. $n = 2$ のとき、次の問に答えよ。

(1) 最大の得点は、何点になるかもとめよ。

(2) 2枚のカードを引いて、このゲームが終了する場合のカードの引き方は、何通りあるかもとめよ。

2. 一般の n について、 $1 \leq r \leq n$ とする。次の問に答えよ。

(1) このゲームが r 回カードを引いて終了する場合のカードの引き方が、何通りあるか求めよ。

(2) r 回目に1の番号のカードを引いてゲームが終了した。このとき、 r 枚引いたカードの中に、2の番号のカードが含まれるカードの引き方が、何通りあるかもとめよ。

(3) r 枚のカードを引いて終わるすべてのカードの引き方に対するそれぞれの得点を、すべて合計した値をもとめよ。