

数 学 問 題

注 意

1. この問題冊子は 14 ページあります。解答用紙には、表と裏があります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕、〔Ⅲ〕の解答は、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕は、解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
7. 1 問につき 2 つ以上マークしないこと。2 つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入しなさい。
9. 訂正するときは、消しゴムできれいに消し、消しクズを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は必ず提出しなさい。
12. 試験時間は 90 分です。

※ この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。

(マーク記入例)

良い例	悪い例
	

〔Ⅰ〕 以下のアからヌにあてはまる 0 から 9 までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし，ウエ，オカ，クケ，タチ，ツテ，トナ，ニヌ は 2 桁の数であり，その他は 1 桁の数である。なお，分数は既約分数にすること。

(1) 正の整数 n を 3 で割ったときの余りを a_n とすると， $a_{100} =$ ア，

$a_{2013} =$ イ である。また， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{\text{ウエ}}{\text{オカ}}$ である。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$ は, $t = \sin x$ と置換することにより

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) (\sin x)' \, dx \\ &= \int_0^1 (1 - t^2) \, dt \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

と求めることができる。同様に, 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx$ を求めると

キ

クケ

である。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

- (3) ある法案に対して、あらかじめ2人の人A, Bが、Aは賛成、Bは反対であると決めている。このとき、3人目の人Cは、AかBを無作為に選び、その人と同じ意見をもつことにする。さらに4人目の人Dは、A, B, Cの中から無作為に1人を選び、その人と同じ意見をもつことにする。このとき、

A, B, Cのうち1人が賛成し2人が反対する確率は $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

また、A, B, C, Dのうち1人が賛成し3人が反対する確率は $\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ 。

2人が賛成し2人が反対する確率は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

- (4) 0 または正の整数 x, y を用いて $n = 5x + 11y$ と表される整数 n 全体の集合を A とする。

A に属する整数のうち、小さい方から数えて 3 番目のものは タチ ,
4 番目のものは ツテ である。また、9 番目のものは トナ である。

m は整数であって、 $n \geq m$ を満たす整数 n はすべて A の要素であるという。このような整数 m のうち最小のものは ニヌ である。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅱ〕 以下のあからうにあてはまるもの(数, 式など)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

a を実数の定数とし, x に関する方程式

$$x^3 - 5x^2 + a = 0 \quad \cdots \cdots (*)$$

を考える。

- (1) 方程式(*)が異なる3つの実数解をもつために a が満たすべき条件は,

あ である。

- (2) 方程式(*)が異なる3つの実数解をもち, その中に整数が含まれるという。

そのような a の値は, 全部で い 個ある。

- (3) a が(2)で考えた値のうちで2番目に小さい値をとるとき, 方程式(*)の解

をすべて求めると, $x =$ う である。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅲ〕 以下のえからけにあてはまるもの(数, 式など)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。ただし, くについては

増加する, 減少する, 極値をもつ

のいずれかを記入せよ。

xy 平面上で, 方程式 $y = \frac{1}{x}$ で表される曲線の第1象限内の部分を C とし, C 上の任意の点 A における C の接線を l_A と表すことにする。

$0 < p < q$ とし, C 上に2点 $P\left(p, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(q, \frac{1}{q}\right)$ をとる。このとき, l_P の方程式は え であり, l_P と l_Q の交点 R の座標を p, q を用いて表すと, お である。

また, 線分 PQ と曲線 C によって囲まれた図形の面積を S とし, $t = \frac{q}{p}$ とおくと, S は t の関数として $S =$ か となる。よって, $\frac{dS}{dt} =$ き となるので, S は区間 $t > 1$ において く 関数である。

さて, $p = 1$, $q = 2$ のときの S の値を S_0 とする。2点 P, Q が条件 $S = S_0$ を満たしながら動くとき, 点 R は方程式 け で表される曲線の第1象限内の部分を描く。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔IV〕 以下の問に答えよ。解答は最終結果だけでなく、途中経過も書くこと。

O を原点とする xy 平面上で、放物線 $y = x^2 - 2x$ の上に異なる 2 点 $A(a, a^2 - 2a)$, $B(b, b^2 - 2b)$ をとり、 $s = a + b$, $t = ab$ とおく。

(1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を s, t を用いて表せ。

(2) A, B が O に一致せず、かつ $\angle AOB = 90^\circ$ となるように動くとき、点 (s, t) が描く図形を st 平面に図示せよ。

(3) A, B が (2) のように動くとき、直線 AB はある定点を通ることを示し、その定点の座標を求めよ。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)