

数 学 問 題

はじめに、これを読みなさい。

1. この問題用紙は7ページある。ただし、ページ番号のない白紙はページ数に含まない。白紙は計算用紙として使用してよい。
2. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認すること。
3. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
4. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークするか、または記入すること。
所定欄以外のところには何も記入しないこと。
5. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
6. 解答は、鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入のこと。
7. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
8. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
9. 問題は〔Ⅰ〕～〔Ⅳ〕まで4問ある。〔Ⅰ〕は必ず解答すること。〔Ⅱ〕,〔Ⅲ〕,〔Ⅳ〕はいずれか2問を選択して解答すること。
10. 解答用紙はすべて回収する。持ち帰らず、必ず提出すること。ただし、この問題用紙は、必ず持ち帰ること。
11. 試験時間は70分である。
12. マーク記入例

良い例	悪い例
	

[I] (1)~(10)において、(A)、(B)、(C)の値の大小関係を調べ、最小のものと最大のものを、それぞれ解答用紙の所定欄にマークせよ。

(1) (A) ${}_{100}C_{50}$ (B) ${}_{101}C_{51}$ (C) ${}_{102}C_{52}$

(2) (A) $\tan 60^\circ$ (B) $3^{0.6}$ (C) $\log_2 5$

(3) $\triangle ABC$ において、 $\angle B = \angle C = 30^\circ$ のとき、

(A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (B) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ (C) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$

(4) 中心を O とする円に内接する四角形 $ABCD$ について、 $\angle A$ は 130° である。

(A) $\sin A$
 (B) $\cos C$
 (C) $\sin \angle BOD$ (ただし、 $\angle BOD < 180^\circ$)

(5) $z = \frac{3+2i}{2-3i}$ (i は虚数単位) とおいたとき、

(A) z の虚部 (B) z の実部 (C) z^2 の実部

(6) 初項 1 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列の

(A) 初項から第 99 項までの和
 (B) 初項から第 100 項までの和
 (C) 初項から第 101 項までの和

(7) 直線 $y = ax + b$ は半径 c の円 $x^2 + y^2 = c^2$ と点 $(3, 4)$ で接している。

(A) a (B) b (C) c

(このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。)

- (8) a, b, c は 0 でない実数とする。関数 $y = ax^2 + bx + c$ の点 $(-1, a - b + c)$ における接線は傾きが -1 で y 切片が -1 、点 $(1, a + b + c)$ における接線は傾きが 7 で y 切片が -1 である。

(A) a (B) b (C) c

- (9) 2 つの正の整数 m, n に関する次の 4 つの条件

- ・ m または n は偶数
- ・ m または n は奇数
- ・ m, n はともに偶数
- ・ m, n はともに奇数

のうち、

- (A) 「 $m + n$ は偶数」であるための十分条件にあたる条件の個数
(B) 「 $m + n$ は奇数」であるための十分条件にあたる条件の個数
(C) 「 mn は偶数」であるための必要条件にあたる条件の個数

- (10) サイコロを繰り返し振り、特定の目が出た時点か、1000 回振った時点で終了し、最後に出た目で賞金額が決まるゲームを行う。

- (A) 1 の目が出たら 100 円をもらいゲームを終了し、他の目が出たら何ももらえないが再度サイコロを振るルールの場合の賞金の期待値。
(B) 1 の目が出たら 300 円をもらいゲームを終了し、2 の目が出たら何ももらえずゲームを終了し、他の目が出たら何ももらえないが再度サイコロを振るルールの場合の賞金の期待値。
(C) 1 の目が出たら 500 円をもらいゲームを終了し、2 か 3 か 4 の目が出たら何ももらえずゲームを終了し、他の目が出たら何ももらえないが再度サイコロを振るルールの場合の賞金の期待値。

(このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。)

〔Ⅱ〕, 〔Ⅲ〕, 〔Ⅳ〕のうち2問を選択して解答せよ。(なお3問すべてに解答した場合は、高得点の2問を合計得点に含める。)

〔Ⅱ〕 所定の解答欄(表面)に、次の各問の答のみを記せ。

正の整数 n に対して $\varphi(n)$ を、 n 以下の正の整数で n と互いに素(n との最大公約数が1)である数 x の個数とする。たとえば、

$$\varphi(9) = 6$$

である。なぜなら、 $x = 8, 7, 5, 4, 2, 1$ だからである。

- (1) $\varphi(15)$ を求めよ。
- (2) p を素数とすると、 $\varphi(p)$ を p で表わせ。
- (3) $n \leq 15$ のとき、 $\varphi(n) = 4$ となる n をすべて求めよ。
- (4) $n \leq 1000$ のとき、 $\varphi(n)$ が最大となる n を求めよ。
- (5) p を素数、 k を正の整数とすると、 $\varphi(p^k) = p^k - \boxed{}$ である。なぜなら、1 から p^k までの数の中で、 p^k と互いに素でないものは p で割り切れるから、それらは $1 \cdot p, 2 \cdot p, 3 \cdot p, \dots, \boxed{} \cdot p$ と表わすことができ、全部で $\boxed{}$ 個となるからである。

上の3つの $\boxed{}$ には同一の式が入る。その式を p と k を用いて表わせ。

(このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。)

〔Ⅱ〕、〔Ⅲ〕、〔Ⅳ〕のうち2問を選択して解答せよ。(なお3問すべてに解答した場合は、高得点の2問を合計得点に含める。)

〔Ⅲ〕 所定の解答欄(裏面)に、(1)、(2)については答のみを、(3)については答と解答経過をともに記せ。

曲線 $y = x^2 - 2x$ と直線 $y = -x + 2$ で囲まれた面積 S の図形がある。原点を通る直線 $y = ax (a > 0)$ はこの図形を2つに分割し、かつ分割してできた2つの図形の面積はともに $\frac{S}{2}$ で等しい。

- (1) 曲線 $y = x^2 - 2x$ と直線 $y = -x + 2$ の交点の座標を求めよ。
- (2) 面積 S を求めよ。
- (3) a の値を求めよ。

〔Ⅳ〕 所定の解答欄(裏面)に、(1)、(2)については答のみを、(3)については答と解答経過をともに記せ。

一辺の長さが a の正四面体 $ABCD$ がある。

- (1) A から $\triangle BCD$ を含む平面に下ろした垂線を AH とするとき、 AH の長さを求めよ。
- (2) 正四面体 $ABCD$ の体積 V を求めよ。
- (3) 正四面体 $ABCD$ に内接する球の半径を r とするとき、 r を求めよ。

(以上問題終)