

数 学 問 題

注 意

1. この問題冊子は 10 ページあります。解答用紙には、おもてと裏があります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕, 〔Ⅲ〕の解答は、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕, 〔Ⅴ〕は、解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
7. 1 問につき 2 つ以上マークしないこと。2 つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入しなさい。
9. 訂正するとき、消しゴムできれいに消し、消しクズを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また、所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は持ち帰らないで、必ず提出しなさい。
12. 試験時間は 120 分です。

※ この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。

(マーク記入例)

良い例	悪い例
	

〔Ⅰ〕 次の空欄 から に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし $\log$ は自然対数, e はその底である。

(1) $x + 3y \leq 5$, $4x + y \leq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ のとき

$x + y$ の最小値は , 最大値は である。

(2) $a = (\log 2)^2$, $b = (\log 5)^2$ とするとき, $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = \boxed{\text{ウ}}$ となる。

〔Ⅱ〕 次の空欄 から に当てはまるもの(数・式など)を解答用紙

の所定の欄に記入せよ。ただし e は自然対数の底である。

- (1) $2 \cos \frac{2\pi}{n}$ が整数となるような自然数 n をすべて列挙すると

$n =$ である。

(2) 関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ は $x =$ のとき最小値 をとり、
 $x =$ のとき最大値 をとる。曲線 $y = f(x)$ の変曲点
のうちで x 座標が正であるものの座標は である。

〔Ⅲ〕 次の空欄 から に当てはまるもの(数・式など)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

A と B を数直線上の異なる 2 点とする。点 P はこの 2 点 A, B のいずれかの上にあり, 1 回の操作で次のように動く。

- 点 P が A 上にあるときは, $\frac{1}{3}$ の確率で B に移り, $\frac{2}{3}$ の確率で A にとどまる。
- 点 P が B 上にあるときは, $\frac{1}{4}$ の確率で A に移り, $\frac{3}{4}$ の確率で B にとどまる。

操作を 1 度もしていない時点では点 P は A 上にあるとする。操作を n 回おこなった後に点 P が A 上にある確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) $p_1 =$, $p_2 =$ である。
- (2) p_{n-1} を用いて p_n を表すと $p_n =$ となる。
- (3) 数列 $\{p_n\}$ の一般項は $p_n =$ となる。

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n =$ である。

(このページは計算用紙として使用してよい)

〔Ⅳ〕 すべての自然数 n に対し、次の等式

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを、 n についての数学的帰納法を用いて示せ。

(このページは計算用紙として使用してよい)

[V] $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ をみたす θ に対して、座標空間の 4 点

$$P(\cos \theta, \sin \theta, \sin \theta), \quad Q(-\cos \theta, \sin \theta, -\sin \theta),$$

$$R(-\cos \theta, -\sin \theta, -\sin \theta), \quad S(\cos \theta, -\sin \theta, \sin \theta)$$

で定まる長方形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を T とする。 T の体積 V を以下の問いにしたがって求めよ (途中の計算や考え方も記述すること)。

- (1) t を $-\cos \theta \leq t \leq \cos \theta$ をみたす実数とする。 yz 平面に平行な平面 $x = t$ と線分 PQ との交点を A 、また平面 $x = t$ と線分 RS との交点を B とする。 A と B の座標をそれぞれ t と θ を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた点 A, B を両端にもつ線分 AB を x 軸のまわりに 1 回転させたとき、線分 AB が通過する部分の面積を求め、それが t によらないことを示せ。
- (3) T の体積 V を求めよ。
- (4) θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき、 V の最大値とそのときの $\cos \theta$ の値を求めよ。

(このページは計算用紙として使用してよい)



