

【 I 】

〔解答〕

- (1) ア Ⓐ イ Ⓑ
- (2) ア Ⓒ イ Ⓓ ウ Ⓔ
- (3) ア Ⓑ イ Ⓒ ウ Ⓓ エ ①
- (4) ア Ⓒ イ Ⓓ
- (5) ア Ⓒ

〔解説〕

- (1) 与えられた複素数の積を計算すると、

$$\begin{aligned}\beta\omega &= 2^{-\frac{4}{3}}\{\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i\}\cdot 2^{-1}(-1+\sqrt{3}i) \\ &= 2^{-\frac{7}{3}}\{\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i\}(-1+\sqrt{3}i) \\ &= 2^{-\frac{7}{3}}\{(-\sqrt{3}-1-3+\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+1+3+\sqrt{3})i\} \\ &= 2^{-\frac{7}{3}}(-4+4i) \\ &= 2^{-\frac{1}{3}}(-1+i)\end{aligned}$$

となるから、求める値は

$$\begin{aligned}(\beta\omega)^3 &= \left\{2^{-\frac{1}{3}}(-1+i)\right\}^3 \\ &= \frac{1}{2}\cdot(-1+3i+3-i) \\ &= 1+i\end{aligned}$$

である。

- (2) 対数の計算法則にしたがって、和を計算すると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\log_{10}\frac{k+1}{k+3} &= \log_{10}\frac{2}{4}+\log_{10}\frac{3}{5}+\cdots+\log_{10}\frac{n+1}{n+3} \\ &= \log_{10}\frac{2\cdot 3\cdots(n+1)}{4\cdot 5\cdots(n+3)} \\ &= \log_{10}\frac{2\cdot 3}{(n+2)(n+3)} \\ &= \log_{10}\frac{6}{(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

となる。

- (3)

①

サイコロを2回続けて振ったとき、その目の出方は $6^2=36$ 通りあり、これらは同様に確からしくおこる。また、 $|a-b|\geq 5$ となるのは、

$$(a,b)=(1,6),(6,1)$$

の2通りであるから、その余事象を考えて、 $|a-b|<5$ となる確率は、

$$1-\frac{2}{6^2}=\frac{17}{18}$$

と求まる。

②

$a<5$ となるような目の出方は $4\times 6=24$ 通りあり、これらは同様に確からしくおこる。また、このときに $|a-b|\geq 5$ となるのは、

$$(a,b)=(1,6)$$

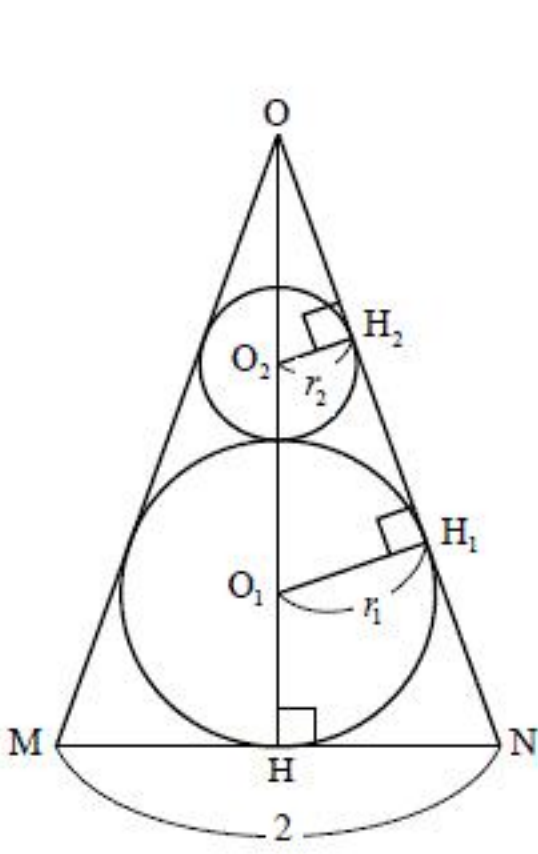
の1通りであるから、その余事象を考えて、 $|a-b|<5$ となる確率は、

$$1-\frac{1}{24}=\frac{23}{24}$$

と求まる。

- (4)

線分ADの中点をM、線分BCの中点をNとしたとき、正四角錐OABCDを3点O、M、Nを通る平面で切ると、以下の図のようになる。



また、球 S_1 、 S_2 の中心を O_1 、 O_2 、その半径を r_1 、 r_2 、点Oから平面ABCDに下ろした垂線の足をHとし、点 O_1 、 O_2 から平面OBCに下ろした垂線の足をそれぞれ H_1 、 H_2 とする。 S_1 と S_2 の体積比が8:1であるから、

$$\begin{aligned}r_1:r_2 &= 2:1 \\ \therefore r_1 &= 2r_2\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。 $\triangle OO_2H_2$ と $\triangle OO_1H_1$ は相似であり、その相似比は $r_2:r_1$ であることに注目すると、

①より、

$$\begin{aligned}OO_1 &= 2OO_2 \\ &= 2(r_1+r_2) \\ &= 3r_1\end{aligned}$$

となることがわかる。また、 $\triangle OO_1H_1$ と $\triangle ONH$ は相似であるから、

$$\begin{aligned}ON:NH &= OO_1:O_1H_1 \\ &= 3r_1:r_1 \\ &= 3:1\end{aligned}$$

より、 $NH=1$ 、 $ON=3$ であることがわかる。したがって、三平方の定理より、

$$\begin{aligned}OH &= \sqrt{3^2-1^2} \\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

と求まる。

- (5)

方程式

$$2x-t=0$$

を x に関して解くと、

$$x=\frac{t}{2}$$

となるから、被積分関数は

$$x<\frac{t}{2}\text{のとき、}\left|2x-t\right|=-\left(2x-t\right)$$

$$x\geq\frac{t}{2}\text{のとき、}\left|2x-t\right|=2x-t$$

となる。以下、 t の値で場合分けをして $f(t)$ を求める。

- [1] $\frac{t}{2}<0$ 、すなわち $t<0$ のとき

$$\begin{aligned}f(t) &= \int_0^2\left|2x-t\right|dx \\ &= \int_0^2(2x-t)dx \\ &= \left[x^2-tx\right]_0^2 \\ &= 4-2t\end{aligned}$$

と求まる。

- [2] $0\leq\frac{t}{2}<2$ 、すなわち $0\leq t<4$ のとき

$$\begin{aligned}f(t) &= \int_0^2\left|2x-t\right|dx \\ &= \int_0^{\frac{t}{2}}-(2x-t)dx+\int_{\frac{t}{2}}^2(2x-t)dx \\ &= -\left[x^2-tx\right]_0^{\frac{t}{2}}+\left[x^2-tx\right]_{\frac{t}{2}}^2 \\ &= -\left(\frac{t^2}{4}-\frac{t^2}{2}\right)+(4-2t)-\left(\frac{t^2}{4}-\frac{t^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}t^2-2t+4 \\ &= \frac{1}{2}(t-2)^2+2\end{aligned}$$

と求まる。

- [3] $\frac{t}{2}\geq 2$ 、すなわち $t\geq 4$ のとき

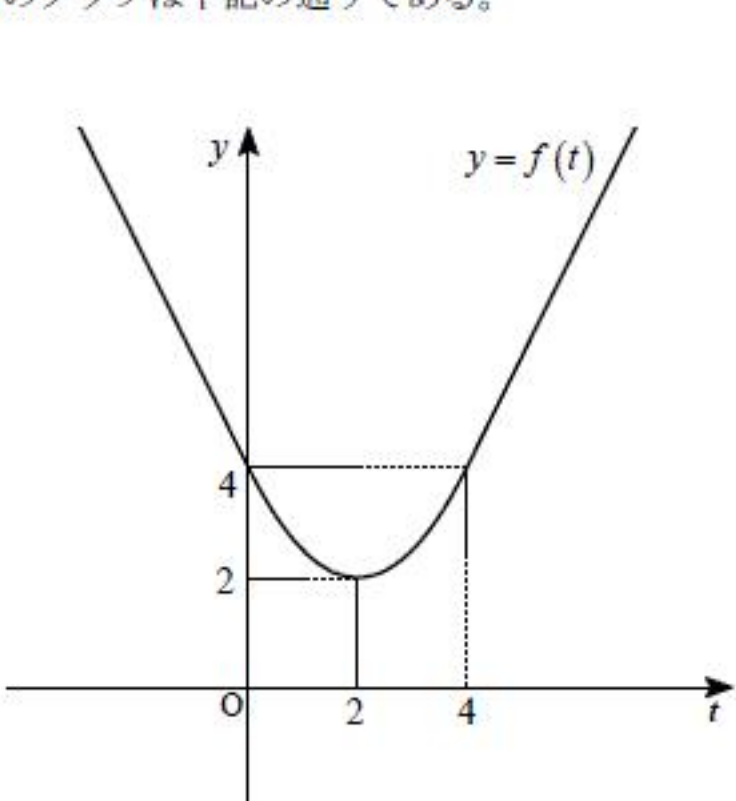
$$\begin{aligned}f(t) &= \int_0^2\left|2x-t\right|dx \\ &= \int_0^2-(2x-t)dx \\ &= -\left[x^2-tx\right]_0^2 \\ &= 2t-4\end{aligned}$$

と求まる。

以上[1]、[2]、[3]より、

$$f(t)=\begin{cases}4-2t & (t<0) \\ \frac{1}{2}t^2-2t+4 & (0\leq t<4) \\ 2t-4 & (t\geq 4)\end{cases}$$

となるから、 $y=f(t)$ のグラフは下記の通りである。



したがって、関数 $f(t)$ は

$$t=2\text{のとき最小値}2$$

をとる。

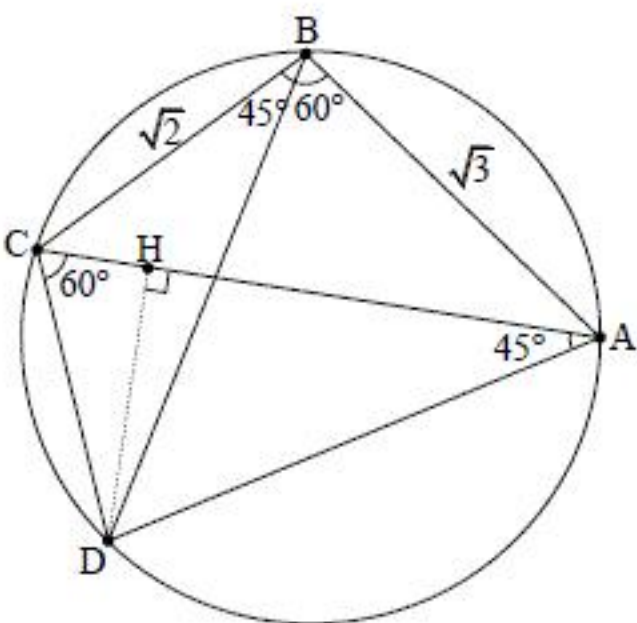
〔Ⅱ〕

〔解答〕

- (1) ア ㊦ イ ㊦ ウ ㊦
 (2) エ ㊦ オ ㊦
 (3) カ ㊦ キ ㊦ ク ㊦
 (4) ケ ㊦ コ ㊦ サ ㊦
 シ ㊦ ス ㊦ セ ㊦

〔解説〕

円に内接した四角形 $ABCD$ は以下の図のようになる。



(1)

$\triangle ABC$ の面積 S_1 は、面積公式と三角関数の加法定理によって、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} BA \cdot BC \sin \angle ABC \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \sin (60^\circ + 45^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} (\sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

と計算できる。

(2)

$\triangle ABC$ に余弦定理を用いることにより、

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC \\ &= 3 + 2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cos (60^\circ + 45^\circ) \\ &= 5 - 2\sqrt{6} (\cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ) \\ &= 5 - 2\sqrt{6} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 5 - 2\sqrt{6} \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \right) \\ &= 8 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

を得る。

(3)

円周角の定理より

$$\begin{aligned} \angle DCA &= \angle DBA = 60^\circ \\ \angle DAC &= \angle DBC = 45^\circ \end{aligned}$$

となるから、上図より、

$$\begin{aligned} AC &= AH + HC \\ &= \frac{DH}{\tan 45^\circ} + \frac{DH}{\tan 60^\circ} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) DH \\ \therefore DH &= \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} AC \end{aligned}$$

となる。

(4)

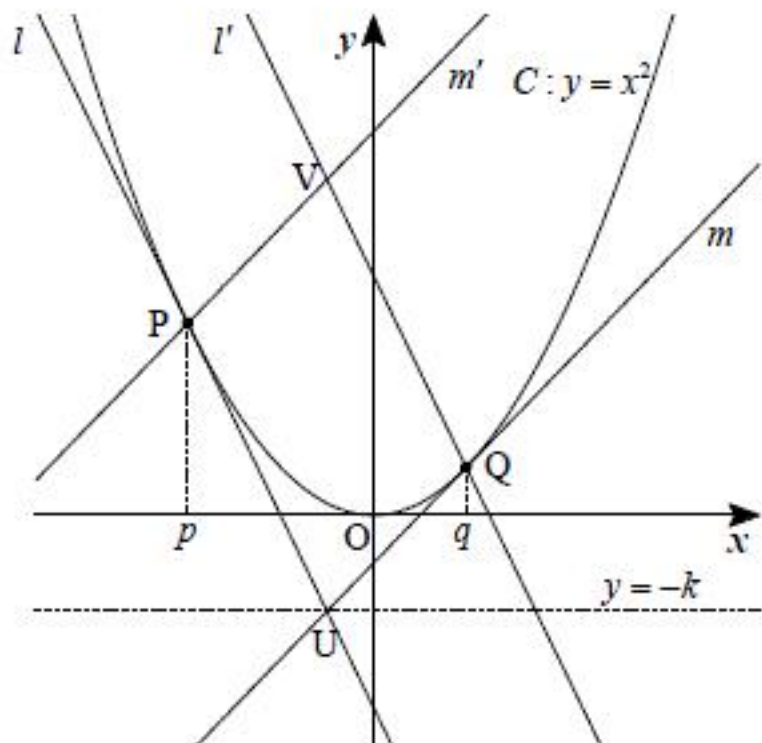
$\triangle ACD$ の面積 S_2 は、辺 AC を底辺、線分 DH の長さを高さともれば、(3)より、

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} AC \cdot DH \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} AC^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{2} (8 - \sqrt{3}) \\ &= \frac{27 - 11\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅲ〕

題意で与えられた曲線、直線、点を図示すると、以下の図のようになる。



(1)

放物線 $C: y = x^2$ の式を x で微分すると、

$$y' = 2x$$

となるから、点 $P(p, p^2)$ における C の接線 l の方程式は、

$$y = 2p(x - p) + p^2$$

$$\therefore y = 2px - p^2$$

となる。同様にして、点 $Q(q, q^2)$ における C の接線 m の方程式は、

$$y = 2qx - q^2$$

となる。

$$(答) \begin{cases} l: y = 2px - p^2 \\ m: y = 2qx - q^2 \end{cases}$$

(2)

連立方程式

$$\begin{cases} y = 2px - p^2 \\ y = 2qx - q^2 \end{cases}$$

の解を求めると、

$$\begin{cases} y = 2px - p^2 \\ y = 2qx - q^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2px - p^2 \\ 2px - p^2 = 2qx - q^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2px - p^2 \\ 2(p - q)x = p^2 - q^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2px - p^2 \\ x = \frac{p+q}{2} (\because p \neq q) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{p+q}{2} \\ y = pq \end{cases}$$

となる。よって、点 U の座標は $U\left(\frac{p+q}{2}, pq\right)$ となる。

$$(答) U\left(\frac{p+q}{2}, pq\right)$$

(3)

(1)と同様に考えれば、直線 l', m' の式は、

$$\begin{cases} l': y = 2p(x - q) + q^2 \\ m': y = 2q(x - p) + p^2 \end{cases}$$

となる。この2式を連立した方程式を解くと、

$$\begin{cases} x = \frac{p+q}{2} \\ y = p^2 + q^2 - pq \end{cases}$$

となるから、点 V の座標は $V\left(\frac{p+q}{2}, p^2 + q^2 - pq\right)$ となる。

$$(答) V\left(\frac{p+q}{2}, p^2 + q^2 - pq\right)$$

(4)

点 U, V の x 座標が同じであることに注意すれば、上図より、平行四辺形 $PUQV$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} |(p^2 + q^2 - pq) - pq| \cdot |q - p|$$

$$= \frac{(q - p)^3}{2} (\because q > p)$$

と求まる。

$$(答) S = \frac{(q - p)^3}{2}$$

(5)

点 U が直線 $y = -k$ ($k > 0$) 上にあるとき、点 V が存在する範囲を W とおくと、

$$V \in W \Leftrightarrow \begin{cases} pq = -k \\ x = \frac{p+q}{2} \\ y = p^2 + q^2 - pq \\ p < 0 < q \end{cases} \text{ を満たす実数 } p, q \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow y = (2x)^2 - 3(-k) \text{ かつ 2 次方程式 } t^2 - 2xt + (-k) = 0 \text{ が正と負の解をもつ}$$

$$\Leftrightarrow y = 4x^2 + 3k \text{ かつ } -k < 0$$

ここで、 $-k < 0$ は成り立っているから、求める条件は $y = 4x^2 + 3k$ である。したがって、 V の描く図形の方程式は

$$y = 4x^2 + 3k$$

である。

$$(答) y = 4x^2 + 3k$$

(6)

(4)より、 $S = \frac{(q - p)^3}{2}$ (> 0) であるから、 $q - p$ が最小となるとき S も最小となることがわかる。

ここで、 $q - p = q + (-p)$ について、 $-p > 0, q > 0$ であるから、相加相乗平均の大小関係より

$$q - p \geq 2\sqrt{-pq} = 2\sqrt{k} \text{ (等号成立は } q = -p \text{ のとき)}$$

となることがわかる。よって、 S は $p = -\sqrt{k}, q = \sqrt{k}$ のときに最小値

$$S = \frac{(2\sqrt{k})^3}{2}$$

$$= 4k\sqrt{k}$$

をとることがわかる。

$$(答) 4k\sqrt{k}$$