

〔I〕

〔解答〕

- (1) ア 4 イ 9
ウ 2 エ 4 オ 5 カ 1
- (2) キ 2 ク 0
ケ 6 コ 0 サ 0

〔解説〕

- (1) 1から99までの3, 4およびその最小公倍数である12の倍数を列挙すると,

3の倍数: $3 \times 1, 3 \times 2, \dots, 3 \times 33$

4の倍数: $4 \times 1, 4 \times 2, \dots, 4 \times 24$

12の倍数: $12 \times 1, 12 \times 2, \dots, 12 \times 8$

となる。したがって、3または4の倍数となる整数の個数は,

$$33 + 24 - 8 = 49 \text{ [個]}$$

であり、これらの数の合計は,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{33} 3k + \sum_{k=1}^{24} 4k - \sum_{k=1}^8 12k &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 33 \cdot 34 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 25 - 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 \\ &= 1683 + 1200 - 432 \\ &= 2451 \end{aligned}$$

である。

- (2) $3^n < 10^{10} < 3^{n+1}$ の各辺の常用対数をとって整理すると,

$$n \log_{10} 3 < 10 < (n+1) \log_{10} 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{\log_{10} 3} - 1 < n < \frac{10}{\log_{10} 3}$$

となる。ここで、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いると,

$$\frac{10}{0.4771} = 20.959 \dots$$

であるから、 $n = 20$ とわかる。したがって,

$$\sum_{k=1}^n 3^k = 3 \cdot \frac{3^{20} - 1}{3 - 1} = \frac{3}{2} (3^{20} - 1)$$

であるが,

$$\begin{aligned} 3^{20} &= (3^{10})^2 \\ &= (59049)^2 \\ &= (59 \times 1000 + 49)^2 \\ &= 59^2 \times 10^6 + 2 \times 59 \times 49 \times 1000 + 49^2 \\ &= 59^2 \times 10^6 + 2 \times 59 \times 49 \times 1000 + 2401 \end{aligned}$$

と変形できるから,

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} (3^{20} - 1) &= \frac{3}{2} (59^2 \times 10^6 + 2 \times 59 \times 49 \times 1000 + 2400) \\ &= 59^2 \times 3 \times 5 \times 10^5 + 3 \times 59 \times 49 \times 1000 + 3600 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $59^2 \times 3 \times 5 \times 10^5$ および $3 \times 59 \times 49 \times 1000$ の項は下3けたに関係しないため、求める数字は3600の下3けたを考え、600となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1) シ 3 ス 7 セ 0

(2) ソ 5 タ 7 チ 0

〔解説〕

(1)

k を自然数とすると、

$$\begin{aligned}(3k-2)^2 &= 9k^2 - 12k + 4 \\ &= 3(3k^2 - 4k + 1) + 1 \\ (3k-1)^2 &= 9k^2 - 6k + 1 \\ &= 3(3k^2 - 2k) + 1 \\ (3k)^2 &= 9k^2\end{aligned}$$

となるから、3 の倍数の数は2乗しても3で割り切れ、3 の倍数以外の数は2乗して3で割ると1余る。よって、 $a^2 + b^2 + c^2$ が3 の倍数となる条件は、

「 a, b, c が全て3 の倍数」 $\dots\dots$ ①

または

「 a, b, c が全て3 の倍数以外の数」 $\dots\dots$ ②

である。したがって、 $a^2 + b^2 + c^2$ が3 の倍数となる a, b, c の組は、

$$3 \cdot 3 \cdot 3 + 7 \cdot 7 \cdot 7 = 370 \text{ [通り]}$$

と求まる。

(2)

与えられた不等式を変形すると、

$$\begin{aligned}a^2 + bc &> ab + ac \\ \Leftrightarrow a^2 - ab - ac + bc &> 0 \\ \Leftrightarrow a(a-b) - c(a-b) &> 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)(a-c) &> 0\end{aligned}$$

となる。したがって、

「 $a > b$ かつ $a > c$ 」または「 $a < b$ かつ $a < c$ 」 $\dots\dots$ ③

となるような a, b, c の組の総数を求めればよい。

[1] $a=1$ のとき

$b=2 \sim 10, c=2 \sim 10$ となればよいので、このとき③を満たす b, c の組は、

$$9 \cdot 9 = 81 \text{ [通り]}$$

となる。

[2] $a=10$ のとき

[1]と同様に考えて、③を満たす b, c の組は81通りである。

[3] $a=k (k=2, 3, \dots, 9)$ のとき

このとき、 (b, c) が

「 $b=1 \sim k-1$ かつ $c=1 \sim k-1$ 」または「 $b=k+1 \sim 10$ かつ $c=k+1 \sim 10$ 」

を満たせばよいので、③を満たす b, c の組は、

$$(k-1)^2 + (10-k)^2 \text{ [通り]}$$

となる。

[1], [2], [3]より、条件を満たす a, b, c の組は、

$$\begin{aligned}81 + \sum_{k=2}^9 \{(k-1)^2 + (10-k)^2\} + 81 &= \sum_{k=1}^{10} (2k^2 - 22k + 101) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 - 22 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 + 101 \cdot 10 \\ &= 770 - 1210 + 1010 \\ &= 570 \text{ [通り]}\end{aligned}$$

と求まる。

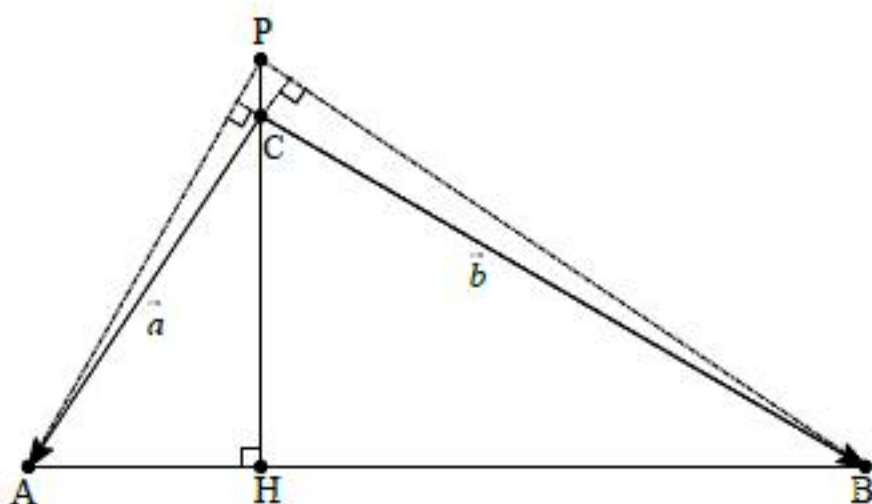
[III]

〔解答〕

- (1) ツ 7 テ 0 ト 3
ナ 1 ニ 1 ヌ 5
- (2) ネ 1 ノ 3 ハ 5
ヒ 1 フ 8
ヘ 5 ホ 6 マ 9

〔解説〕

題意で与えられた $\triangle ABC$ は以下のようになる。



また、 $\angle CAB = A$, $\angle CBA = B$ とおくことにする。

(1)

与えられた条件より, $\cos A = \frac{5}{9}$, $\cos B = \frac{13}{15}$ であるから,

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$$

$$\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{13}{15}\right)^2} = \frac{2\sqrt{14}}{15}$$

である。したがって、 $\triangle ABC$ において正弦定理を用いることにより、

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \quad \therefore BC = \frac{5}{3} AC \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、

$$AB = AC \cos A + BC \cos B$$

$$\Leftrightarrow 10 = \frac{5}{9}AC + \frac{13}{15} \cdot \frac{5}{3}AC \quad (\because \textcircled{1})$$

$\therefore AC = 5$

となり、よって①より、 $BC = \frac{25}{3}$ であるから、

$$AB + BC + CA = 10 + \frac{25}{3} + 5 = \frac{70}{3}$$

となる。さらに、 $\triangle ABC$ において余弦定理を用いることにより、

$$\begin{aligned}\cos \angle ACB &= \frac{5^2 + \left(\frac{25}{3}\right)^2 - 10^2}{2 \cdot 5 \cdot \frac{25}{3}} \\ &= -\frac{1}{15}\end{aligned}$$

と求まる。

(2)

点Hは直線AB上の点であるから、実数 t を用いて、

$$\overrightarrow{CH} = (1-t)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。また、点Pは直線CH上にあるから、実数 k を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= k\overrightarrow{CH} \\ &= k(1-t)\vec{a} + kt\vec{b}\end{aligned}$$

と表すことができ、題意の条件より2ベクトル $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{BC}$ は直交し、 $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AC}$ も直交するから

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CP}) \cdot (-\overrightarrow{CB}) = 0 \\ (\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CB}) \cdot (-\overrightarrow{CA}) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \{ (1-k(1-t))\vec{a} - kt\vec{b} \} \cdot (-\vec{b}) = 0 \\ \{ k(1-t)\vec{a} + (kt-1)\vec{b} \} \cdot (-\vec{a}) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -\{1-k(1-t)\}\vec{a} \cdot \vec{b} + kt|\vec{b}|^2 = 0 \\ -k(1-t)|\vec{a}|^2 - (kt-1)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \dots \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

を満たす。ここで, (1)より,

$$|a|^2 = 5^2$$

$$|\vec{b}|^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle ACB \\ &= 5 \cdot \frac{25}{3} \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)\end{aligned}$$

となるから、③は

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 26kt - k + 1 = 0 \\ 10kt - 9k - 1 = 0 \end{cases} \quad \dots \quad (4)$$

となる。あとは④の2式から kt を消去することによって、

$$\left(\frac{13}{5} \cdot 9 - 1\right)k + \frac{18}{5} = 0$$

$$\therefore k = -\frac{9}{56} \quad \dots \textcircled{5}$$

と求まり、これを④の1つ目の式に代入することで、

$$26 \cdot \left(-\frac{9}{56}\right)t - \left(-\frac{9}{56}\right) + 1 = 0$$
$$\therefore t = \frac{5}{18}$$

と求まる。したがって、これを②に代入することによって、

$$\overrightarrow{CH} = \frac{13\vec{a} + 5\vec{b}}{18}$$

であり、⑤より、

$$|\overline{\text{CH}}| : |\overline{\text{CP}}| = 1 : |\dot{k}|$$

であることがわかる。

〔IV〕

〔解答〕

- (1) ミ 2 ム 0 メ 1
 (2) モ 5 ヤ 4
 (3)

(2)より、曲線 $C: y = x^3 - 2x^2 + 1$ 上の x 座標が t である点における接線と、曲線 C の共有点は、

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 1 &= t(3t - 4)x - 2t^3 + 2t^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - t(3t - 4)x + 2t^3 - 2t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - t)^2 (x + 2t - 2) &= 0 \\ \therefore x &= t, -2t + 2 \end{aligned}$$

より、接点以外の共有点は、曲線 C 上の x 座標が $-2t + 2$ である点に限られることがわかる。したがって、点 P における 2 本の接線は、一方は点 P を接点にもつ接線であり、もう 1 つの接線は点 P 以外の点 P' を接点にもつ接線であることがわかる。ここで、点 P' の x 座標を t とおくと、点 P の x 座標は $-2t + 2$ となるから、まず点 P を通る 2 接線が存在するための条件は

$$\begin{aligned} t &\neq -2t + 2 \\ \Leftrightarrow t &\neq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

であり、このとき、点 P を通る 2 接線が直交するための条件は、④より、

$$t(3t - 4) \cdot (-2t + 2)(-6t + 2) = -1 \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。ここで t と $-2t + 2$ は 1 対 1 で対応していることに注意すると、問題は⑤を満たすような t の値をすべて求めればよいことと言い換えることができるが、問題文より⑤を満たすような実数 t がちょうど 2 つ存在していることがわかっているから、それを手掛かりにこの方程式の解を探すことを考える。

まず、 $t = \frac{2}{3}$ という値に注意して⑤を変形すると、

$$\begin{aligned} \left\{ \left(t - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} \right\} \left\{ 3 \left(t - \frac{2}{3} \right) - 2 \right\} \cdot \left\{ (-2) \left(t - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} \right\} \left\{ -6 \left(t - \frac{2}{3} \right) - 2 \right\} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 36 \left\{ \left(t - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} \right\} \left\{ \left(t - \frac{2}{3} \right) - \frac{2}{3} \right\} \left\{ \left(t - \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{3} \right\} \left\{ \left(t - \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{3} \right\} + 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

となるから、 $T = t - \frac{2}{3}$ とおくと、⑥より、

$$\begin{aligned} 36 \left(T + \frac{2}{3} \right) \left(T - \frac{2}{3} \right) \left(T - \frac{1}{3} \right) \left(T + \frac{1}{3} \right) + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow T^4 - \frac{5}{9} T^2 + \frac{25}{324} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(T^2 - \frac{5}{18} \right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow T^2 &= \frac{5}{18} \\ \therefore T &= \pm \frac{\sqrt{10}}{6} \end{aligned}$$

と求まる。よって、

$$\begin{aligned} t &= \frac{2}{3} + T \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{10}}{6} \end{aligned}$$

となるから、求める点 P の座標は

$$-2t + 2 = \frac{2 \mp \sqrt{10}}{3}$$

であることがわかる。これは $t \neq \frac{2}{3}$ を満たす。

$$\text{(答)} \quad \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

〔解説〕

- (1) 問題の条件より、曲線 $C: y = x^3 - ax^2 + bx + c$ が点 $(1, 0)$ を通るから、

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - a + b + c \\ \Leftrightarrow a - b - c &= 1 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を満たす。また、曲線 $C: y = x^3 - ax^2 + bx + c$ について、この式を x で微分すると、

$$y' = 3x^2 - 2ax + b$$

であり、曲線 C の点 $(1, 0)$ における接線の方程式の傾きが -1 になることに注意すると、

$$\begin{aligned} 3 - 2a + b &= -1 \\ \Leftrightarrow 2a - b &= 4 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を満たすことがわかる。そして、曲線 $C: y = x^3 - ax^2 + bx + c$ は点 $(0, 1)$ を通るから、

$$\begin{aligned} 0^3 - a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= 1 \\ \Leftrightarrow c &= 1 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となることがわかる。よって、①～③から

$$a = 2, b = 0, c = 1$$

と求まる。

- (2) 曲線 $C: y = x^3 - 2x^2 + 1$ 上の、 x 座標が t である点における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 - 4t)(x - t) + t^3 - 2t^2 + 1 \\ \therefore y &= t(3t - 4)x - 2t^3 + 2t^2 + 1 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

である。この接線が点 $(1, 0)$ を通るための条件は

$$\begin{aligned} -2t^3 + 5t^2 - 4t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -(t - 1)(2t^2 - 3t + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 1)^2 (2t - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 1, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であり、 $t = 1$ のときは接線 $y = -x + 1$ を表すから、求める接線は $t = \frac{1}{2}$ のときのものである。よ

って、④に $t = \frac{1}{2}$ を代入することで、

$$y = -\frac{5}{4}(x - 1)$$

を得る。