

〔Ⅰ〕

〔解答〕

- 1. (1) I (2) K
- 2. (3) E (4) I
- 3. (5) J (6) O

〔解説〕

1.

$x > 0, y > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_2 y &= 1 \\ \Leftrightarrow \log_2 xy &= \log_2 2 \\ \Leftrightarrow xy &= 2\end{aligned}$$

となる。これと $x + y = 3$ より, x, y は 2 次方程式 $t^2 - 3t + 2 = 0$ の 2 つの解である。

$$\begin{aligned}t^2 - 3t + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 2)(t - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 1, 2\end{aligned}$$

と, $x < y$ であることから, $x = 1, y = 2$ と求まる。

2.

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 3x + 1, \\ f'(x) &= 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)\end{aligned}$$

より, $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大値 3	$\searrow$	極小値 -1	$\nearrow$

したがって, $A(-1, 3), B(1, -1)$ となる。よって

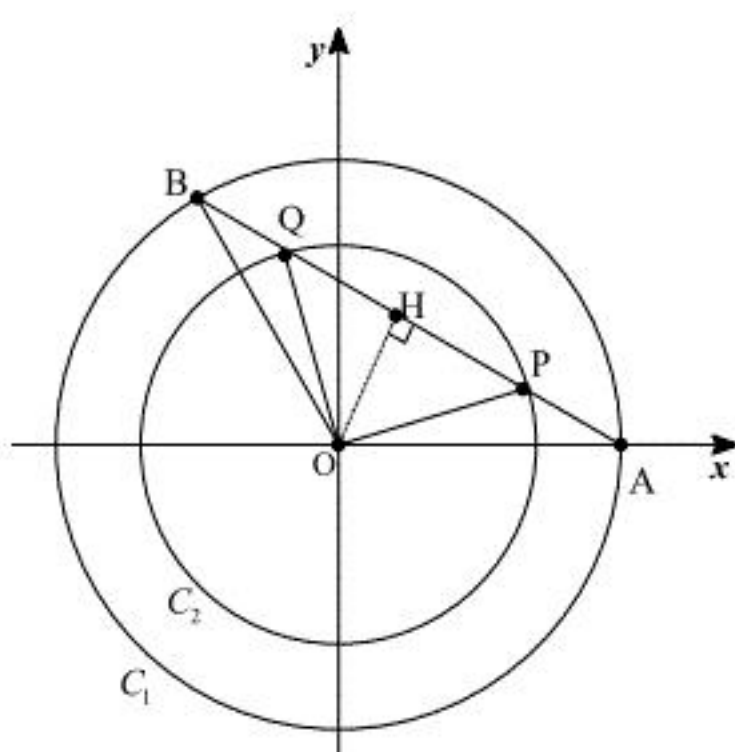
$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

と求まる。また, $\triangle OAB$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{10 \cdot 2 - (-4)^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

と求まる。

3.



原点 O から線分 AB に下ろした垂線の足を H とする。 $\triangle AOB = S_1$, $\triangle POQ = S_2$ とすると, 求める比は

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot OH \cdot 6}{\frac{1}{2} \cdot OH \cdot 4} = \frac{3}{2}$$

となる。また, 円 C_1, C_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とおくと, $\triangle POH, \triangle AOH$ に三平方の定理を適用して

$$\begin{aligned}OH^2 &= r_2^2 - 2^2, OH^2 = r_1^2 - 3^2 \\ \therefore r_1^2 - r_2^2 &= 3^2 - 2^2 = 5\end{aligned}$$

となるから, C_1 から C_2 を除いた領域の面積は

$$\pi(r_1^2 - r_2^2) = 5\pi$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

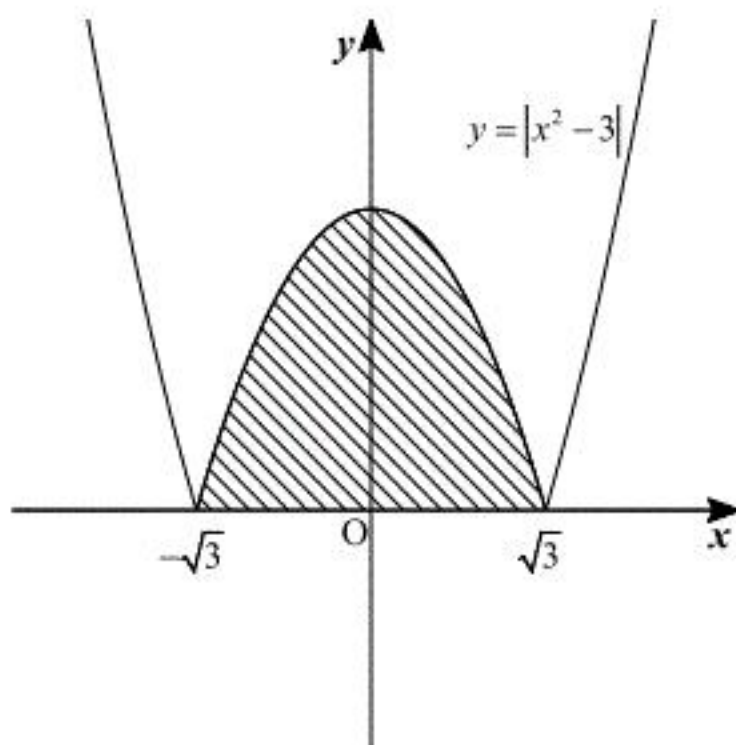
- 1 ア 4 イ 3
 2 ウ 1 エ 5 オ 8 カ 3 キ 8
 ク 3 ケ 2 コ 0 サ 5 シ 3

〔解説〕

1.

$$|x^2 - 3| = \begin{cases} -x^2 + 3 & (-\sqrt{3} \leq x < \sqrt{3}) \\ x^2 - 3 & (x < -\sqrt{3}, \sqrt{3} \leq x) \end{cases}$$

より、下図の領域の面積が求める面積である。



以上より、面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (-x^2 + 3) dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

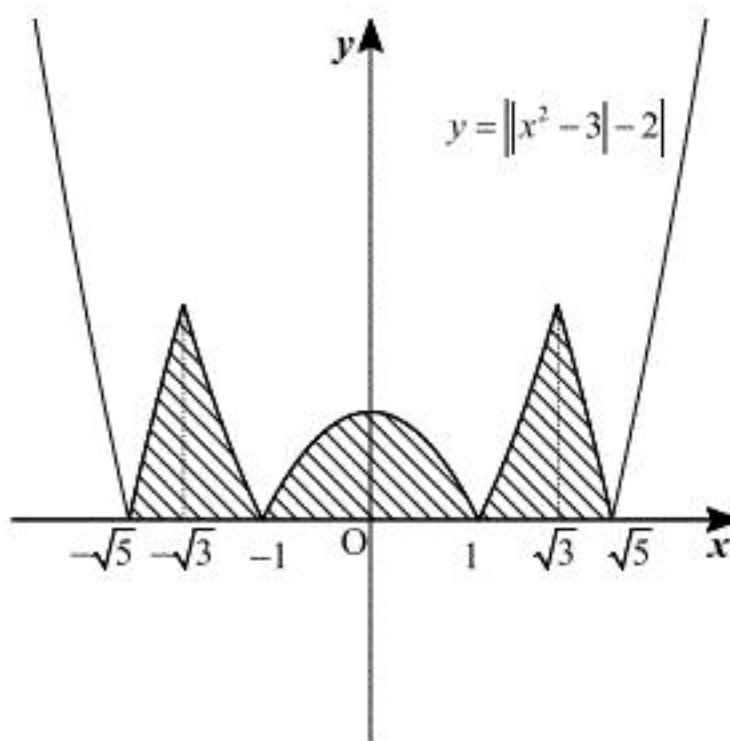
2.

$$\begin{aligned} g(x) &= ||x^2 - 3| - 2| \\ &= \begin{cases} x^2 - 5 & (x < -\sqrt{5}, \sqrt{5} \leq x) \\ 5 - x^2 & (-\sqrt{5} \leq x < -\sqrt{3}, \sqrt{3} \leq x < \sqrt{5}) \\ x^2 - 1 & (-\sqrt{3} \leq x < -1, 1 \leq x < \sqrt{3}) \\ 1 - x^2 & (-1 \leq x < 1) \end{cases} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \pm 1, \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

である。また、下図の領域が求める面積である。



以上より、求める面積は

$$\begin{aligned} &2 \left\{ \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (5 - x^2) dx + \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx + \int_0^1 (1 - x^2) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \left[-\frac{1}{3}x^3 + 5x \right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} + \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_{-1}^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 \right\} \\ &= 2 \left\{ \left\{ \left(-\frac{5\sqrt{5}}{3} + 5\sqrt{5} \right) - (5\sqrt{3} - \sqrt{3}) \right\} + \left\{ (\sqrt{3} - \sqrt{3}) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right\} + \left\{ \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) + (0 + 0) \right\} \right\} \\ &= \frac{8}{3} - 8\sqrt{3} + \frac{20\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

1.

まず、 $m=5$ のときの $A(m)$ の要素を考える。 $i+j+k=5$ であるから、これを満たす (i,j,k) は以下の表ようになる。ここで、 $B(m)$ の要素にもなるものは、表の右端の対応する部分に○を付けている。

i	j	k	
1	1	3	
1	2	2	
1	3	1	
2	1	2	
2	2	1	
3	1	1	

したがって、 $n(A(5))=6, n(B(5))=0$ となる。同様に、 $m=6$ のときの $A(m)$ の要素は以下の表ようになる。ここで、 $B(m)$ の要素にもなるものは、表の右端の対応する部分に○を付けている。

i	j	k	
1	1	4	
1	2	3	○
1	3	2	○
1	4	1	
2	1	3	○
2	2	2	
2	3	1	○
3	1	2	○
3	2	1	○
4	1	1	

したがって、 $n(A(6))=10, n(B(6))=6$ となる。以上より、

$$\begin{aligned} a_5 &= 6 \\ a_6 &= 10 \\ b_5 &= 0 \\ b_6 &= 6 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \ a_5=6, a_6=10, b_5=0, b_6=6$$

2.

$i+j+k=m-1$ を満たす (i,j,k) の個数は a_{m-1} である。この (i,j,k) における i の値を1大きくしたものを i' と表記すると、 $i'+j+k=m$ となり、この (i',j,k) はすべて、 $A(m)$ の要素となる。ここで i は自然数であるから、 $i' \geq 2$ となっている。したがって、この (i',j,k) は $A(m)$ の要素のうち $i \neq 1$ であるものの全体となる。以上より、 $A(m)$ の要素のうち $i \neq 1$ であるものの個数は a_{m-1} となる。

また、部分集合 C の定義より、 $A(m)$ の要素のうち $i=1$ であるものの個数は $n(C)$ となる。以上をまとめると、 $A(m)$ の要素の個数 a_m は、

$$a_m=n(C)+a_{m-1}$$

となる。これを变形すると、

$$\begin{aligned} a_m &= n(C)+a_{m-1} \\ \Leftrightarrow n(C) &= a_m-a_{m-1} \end{aligned}$$

が得られる。

(証明終)

3.

以下、 $m \geq 3$ のときを考える。 i の値を1から $m-2$ まで一つずつ固定して $A(m)$ の要素を数えていく。これを表にすると以下ようになる。

i	j	k	
1	1	$m-2$	
	2	$m-3$	
	...	...	
	$m-3$	2	
	$m-2$	1	計 $m-2$
2	1	$m-3$	
	...	...	
	$m-3$	1	計 $m-3$
...			
$m-2$	1	1	計 1

したがって、 $m \geq 3$ において a_m は、

$$\begin{aligned} a_m &= (m-2)+(m-3)+\cdots+2+1 \\ &= \frac{(m-1)(m-2)}{2} \end{aligned}$$

となる。 $m=1, m=2$ のときは $i+j+k=m$ を満たす (i,j,k) は無いから、 $a_m=0$ となる。これは、上式を満たしている。

$$(\text{答}) \ a_m=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

4.

m が奇数でかつ3の倍数であるとき、自然数 l を用いて、

$$m=6l-3$$

と書ける。 $l \geq 2$ のとき、 $i+j+k=6l-3$ を満たすような (i,j,k) のうち、並び順を考慮しない

場合に、 $B(m)$ の補集合 $\overline{B(m)}$ に該当するような組み合わせとして、

$$\begin{aligned} &(1, 1, 6l-5) \\ &(2, 2, 6l-7) \\ &\vdots \\ &(2l-1, 2l-1, 2l-1) \\ &\vdots \\ &(3l-2, 3l-2, 1) \end{aligned}$$

が考えられる。並び順を考慮すると、 $(2l-1, 2l-1, 2l-1)$ 以外はすべて3通りの並べ方をもつから、このときの $\overline{B(6l-3)}$ の要素の個数は、

$$n(\overline{B(6l-3)})=(3l-2-1+1-1) \cdot 3+1=9l-8$$

となる。また、 $l=1$ のとき、 $\overline{B(3)}$ の要素となるのは $(i,j,k)=(1,1,1)$ の1通りのみであるから、

上記をみtas。したがって、 $\overline{B(m)}$ の要素の個数を m を用いて表すと、

$$n(\overline{B(m)})=9 \cdot \frac{m+3}{6}-8=\frac{3m-7}{2}$$

となる。以上の結果から、

$$\begin{aligned} b_m &= n(B(m)) \\ &= n(A(m))-n(\overline{B(m)}) \\ &= \frac{(m-1)(m-2)}{2}-\frac{3m-7}{2} \\ &= \frac{(m-3)^2}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \ n(\overline{B(m)})=\frac{3m-7}{2}, b_m=\frac{(m-3)^2}{2}$$