

【Ⅰ】

【解答】

アイウ	153	エオ	20	カ	1	キ	3	クケ	10
コ	3	サシ	15	スセソ	100	タチ	85	ツ	1
テ	0	ト	0	ナ	0				

【解説】

(1) 公差を d とすると $a_3 = 0$ より初項は $a_1 = -2d$ となるから、一般項 a_n は

$$a_n = -2d + (n-1)d = (n-3)d$$

と表せる。与えられた条件より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^6 a_k &= 6 \\ \Leftrightarrow 3d &= 6 \\ \Leftrightarrow d &= 2\end{aligned}$$

が得られる。これより一般項は

$$a_n = 2(n-3) = 2n-6$$

である。 $a_N \geq 300$ を考えると

$$\begin{aligned}2N-6 &\geq 300 \\ \Leftrightarrow N &\geq 153\end{aligned}$$

より $N_1 = 153$ である。また $\sum_{n=1}^N a_n \geq 300$ を考えると

$$\begin{aligned}\frac{N\{-4+(2N-6)\}}{2} &\geq 300 \\ \Leftrightarrow N(N-5) &\geq 300 \\ \Leftrightarrow (N-20)(N+5) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow N &\geq 20 \quad (\because N+5 > 0)\end{aligned}$$

より、 $N_2 = 20$ である。

(2)

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので、 $0 < \frac{\theta}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ である。従って、 $\cos \theta, \cos \frac{\theta}{2}, \tan \frac{\theta}{2}, \tan \frac{\theta}{4} > 0$ となる。ここで

$\tan \theta = \frac{3}{4}$ より $\cos \theta = \frac{4}{5}$ であるので

$$\begin{aligned}\tan^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta} \\ &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

となる。よって $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{3} (> 0)$ である。また、

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1+\cos \theta}{2} \\ &= \frac{9}{10}\end{aligned}$$

より $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}} (> 0)$ である。従って同様に

$$\tan^2 \frac{\theta}{4} = \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta} = (\sqrt{10}-3)^2$$

から $\tan \frac{\theta}{4} = \sqrt{10}-3 (> 0)$ とわかる。

(3) (a)

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

とおく。 A から異なる 4 つの要素を選び、それを小さい順に A_1, A_2, A_3, A_4 とすれば、 $A_1 < A_2 < A_3 < A_4$ となる組 (A_1, A_2, A_3, A_4) が得られる。したがって、求める場合の数は

$${}_6C_4 = 15 (\text{通り})$$

である。

(b)

(a)と同様に考えると、 $A_1 < A_2 < A_3$ となる組 (A_1, A_2, A_3) の総数は ${}_6C_3 = 20$ 通りあり、各々の組に対し $A_3 \neq A_4$ となる A_4 は 5 通りあるので、求める場合の数は

$$20 \times 5 = 100 (\text{通り})$$

である。

(c)

$A_1 < A_2 < A_3$ を満たす A_3 として考えられる値は $A_3 = 3, 4, 5, 6$ である。 $A_3 = i (i = 3, 4, 5, 6)$ に対し、 $A_1 < A_2 < A_3$ となる組 (A_1, A_2, A_3) の総数は

$${}_{i-1}C_2 = \frac{1}{2}(i-1)(i-2) (\text{通り})$$

あり、各々の組に対し $A_3 > A_4$ となる A_4 は $i-1$ 通りあるので、求める場合の数は

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^6 \frac{1}{2}(i-1)^2(i-2) &= 2+9+24+50 \\ &= 85 (\text{通り})\end{aligned}$$

である。

(4) (a)

$$xy \geq 1 \Rightarrow x+y \geq 2$$

は偽である ($x = -1, y = -1$ が反例である)。

(b)

$x^2 + y^2 \leq 1$ を満たす (x, y) は、

$$(x, y) = (a \cos \theta, a \sin \theta) (0 \leq a \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

と表すことができる。このとき

$$\begin{aligned}|x| + |y| &= |a \cos \theta| + |a \sin \theta| \\ &= a(|\sin \theta| + |\cos \theta|)\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$|\cos \theta| = \cos \phi, |\sin \theta| = \sin \phi$$

となる実数 $\phi (0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2})$ がとれるので

$$\begin{aligned}|x| + |y| &= a(\sin \phi + \cos \phi) \\ &= \sqrt{2}a \sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) \\ &\leq \sqrt{2} (\because 0 \leq a \leq 1, \sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1)\end{aligned}$$

が成り立つ。従って、与えられた命題は真である。

(c)

与えられた命題の対偶を考えると

$$「x > 1 \text{ かつ } y > 1」\Rightarrow x+y > 2$$

となる。これは真であるから、もとの命題も真となる。

(d)

$$(0 \leq) x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 \leq 1 - 2x^2y^2$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 \leq 1 (\because x^2y^2 \geq 0)$$

となるから、与えられた命題は真となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

$$(1) \quad \boxed{\text{あ}} \quad \frac{x+1}{2} + \frac{y^2}{2(x+1)} \qquad \boxed{\text{い}} \quad \frac{1-x}{2} + \frac{y^2}{2(1-x)}$$

$$(2) \quad \boxed{\text{う}} \quad \frac{1}{2} \qquad \boxed{\text{え}} \quad \frac{5}{6} \qquad \boxed{\text{お}} \quad \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \boxed{\text{か}} \quad \frac{1}{2} < y < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

〔解説〕

(1)

条件より,

$$P(-1+a, 0), Q(1-b, 0)$$

であるから,

$$AP = PR$$

$$\Leftrightarrow AP^2 = PR^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \{x - (-1+a)\}^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)a = (x+1)^2 + y^2$$

$$\therefore a = \frac{(x+1)^2 + y^2}{2(x+1)} = \frac{x+1}{2} + \frac{y^2}{2(x+1)} \quad (\because x \neq -1)$$

となり, 同様に

$$BQ = QR$$

$$\Leftrightarrow BQ^2 = QR^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 = \{x - (1-b)\}^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 2(1-x)b = (1-x)^2 + y^2$$

$$\therefore b = \frac{(1-x)^2 + y^2}{2(1-x)} = \frac{1-x}{2} + \frac{y^2}{2(1-x)} \quad (\because x \neq 1)$$

となる。

(2)

(1)の結果より, $x = \frac{1}{2}$ のとき

$$a = \frac{3}{4} + \frac{y^2}{3}, b = \frac{1}{4} + y^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

である。ここで, このとき

$$PQ = 2 - (a+b) = 1 - \frac{4}{3}y^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

であるから,

$$PQ = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{4}{3}y^2 = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \quad (\because y > 0)$$

であり, これを①に代入して

$$a = \frac{5}{6}, b = \frac{1}{2}$$

を得る。

(3)

2点P, Qは線分AB上の異なる2点であるから, 常に

$$PQ > 0$$

が成り立つ。よって②より, y のとりうる値の範囲は

$$0 < PQ < \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{4}{3}y^2 < \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < y^2 < \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{2} < y < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because y > 0)$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

$$\boxed{\text{き}} \quad \frac{y+z}{\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}}$$

$$\boxed{\text{く}} \quad \frac{x^2}{2y}$$

$$\boxed{\text{け}} \quad \frac{3}{2} - \log 2$$

〔解説〕

(1)

$$\overrightarrow{\text{OA}} = (0, 1, 1), \overrightarrow{\text{OP}} = (x, y, z)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \cos \angle \text{AOP} &= \frac{\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OP}}}{|\overrightarrow{\text{OA}}| |\overrightarrow{\text{OP}}|} \\ &= \frac{0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{y+z}{\sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2)}} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

(1)の答に, $\angle \text{AOP} = \frac{\pi}{4}$ を代入すると, $y > 0$ であることに注意して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{y+z}{\sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2)}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (y+z)^2 \\ \therefore z &= \frac{x^2}{2y} \end{aligned}$$

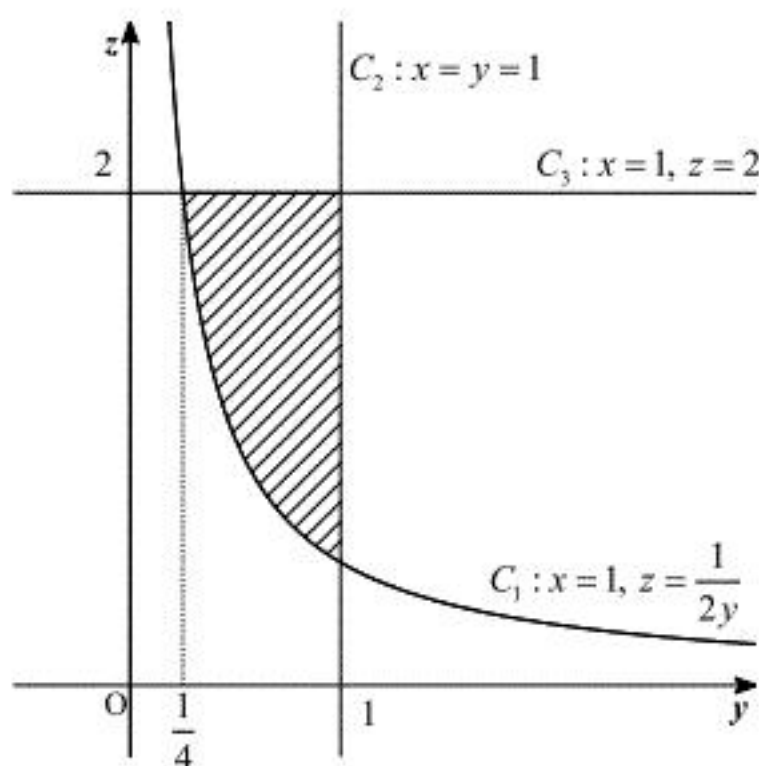
と求まる。

(3)

(2)の答に, $x=1$ を代入することにより,

$$C_1: z = \frac{1}{2y}, x=1$$

となることがわかるから, 平面 L において, C_1, C_2, C_3 は下図のようになる。



したがって, 求める面積は, 上図斜線部の面積であり, その値は

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{2y} dy &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} [\log |y|]_{\frac{1}{4}}^1 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(0 - \log \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{2} - \log 2 \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅳ〕

$0 \leq t \leq \pi$ を定義域とする 2 つの関数

$$f(t) = \cos 2t + 2 \cos t, \quad g(t) = 1 - \cos 2t$$

を考える。

(1)

まず、 $f(t)$ の増減を調べる。与えられた関数 $f(t)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2 \sin 2t - 2 \sin t \\ &= -4 \sin t \left(\cos t + \frac{1}{2} \right) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となるから、特に、 $f'(t) = 0$ となる t の値を求めると、

$$\sin t = 0 \quad \text{または} \quad \cos t = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore t = 0, \frac{2}{3}\pi, \pi$$

となる。また、これらの値をとるとき、

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 + 2 \\ &= 3 \\ f\left(\frac{2}{3}\pi\right) &= -\frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{3}{2} \\ f(\pi) &= 1 + 2(-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

となるから、 $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で増減表を作ると、①より以下のようになる。

t	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$f'(t)$	0	-	0	+	0
$f(t)$	3	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	-1

(答) $f(t)$ の増減: 前表

同様にして、 $g(t)$ の増減を調べる。与えられた関数 $g(t)$ を微分すると、

$$g'(t) = 2 \sin 2t \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となるから、特に、 $g'(t) = 0$ となる t を求めると、

$$2t = 0, \pi, 2\pi$$

$$\therefore t = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi$$

となる。また、これらの値をとるとき、

$$\begin{aligned} g(0) &= 1 - 1 \\ &= 0 \\ g\left(\frac{1}{2}\pi\right) &= 1 - (-1) \\ &= 2 \\ g(\pi) &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから、 $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で増減表を作ると、②より以下のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{2}\pi$	...	π
$g'(t)$	0	+	0	-	0
$g(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

(答) $g(t)$ の増減: 前表

(2)

$t = \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi$ のときの $f(t), g(t)$ の値を求めると、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\pi\right) &= -1 + 2 \cdot 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{2}{3}\pi\right) &= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

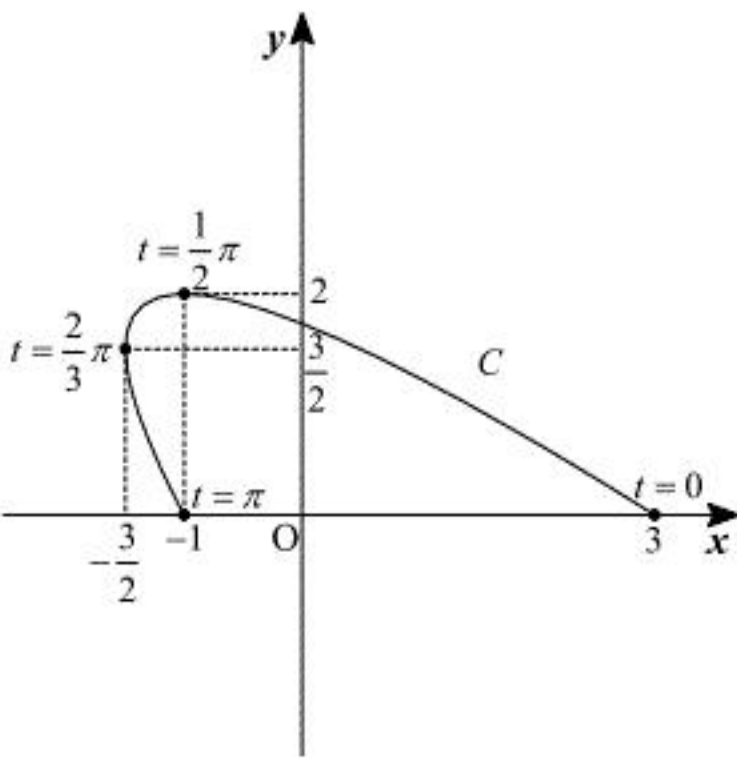
となるから、 t を媒介変数として

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

で表される xy 平面上の曲線 C の進行表を作ると、(1)より以下のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{2}\pi$	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$\frac{dx}{dt}$	0	-	-	-	0	+	0
$\frac{dy}{dt}$	0	+	0	-	-	-	0
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\nwarrow$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\swarrow$	$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$	$\searrow$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

この表をもとに、 C の概形を xy 平面上に図示すると以下のようになる。



(答) 前図

(3)

C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S は、題意で与えられた等式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

を用いると、(2)の図より

$$\begin{aligned} S &= \int_{t=\frac{2}{3}\pi}^{t=0} y dx - \int_{t=\frac{2}{3}\pi}^{t=\pi} y dx \\ &= \int_{t=\pi}^{t=0} g(t) \cdot \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_{\pi}^0 (1 - \cos 2t) (-2 \sin 2t - 2 \sin t) dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) (\sin 2t + \sin t) dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} (\sin 2t + \sin t - \sin 2t \cos 2t - \sin t \cos 2t) dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} \left\{ \sin 2t + \sin t - \frac{1}{2} \sin 4t - \frac{1}{2} \{ \sin(3t) + \sin(-t) \} \right\} dt \quad (\because \textcircled{3}) \\ &= 2 \left[-\frac{1}{2} \cos 2t - \cos t + \frac{1}{8} \cos 4t + \frac{1}{6} \cos 3t - \frac{1}{2} \cos t \right]_0^{\pi} \\ &= 2 \left\{ \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 - (-1) + \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{6} (-1) - \frac{1}{2} (-1) \right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 - 1 + \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \right\} \\ &= 2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \right) - \left(-2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \right) \right\} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S = \frac{16}{3}$