

[I]

[解答]

1 H

2 H

[解説]

$BC = a = 5$, $CA = b = 8$, $AB = c = 9$ とすると,

$$\cos \angle ACB = \frac{5^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned}\sin \angle ACB &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle ACB} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{100}} \\ &= \frac{3\sqrt{11}}{10}\end{aligned}$$

であるから, $\triangle ABC$ の面積を S とおくと,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \angle ACB \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{11}}{10} \\ &= 6\sqrt{11}\end{aligned}$$

となる。また, $\triangle ABC$ の内接円の半径を r とおくと,

$$\frac{1}{2}(5+8+9)r = S$$

であるから,

$$r = \frac{S}{11} = \frac{6\sqrt{11}}{11}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

3 I

〔解説〕

定数 A をつかって、 $\int_0^3 f(t) dt = A$ とおく。そのとき、

$$f(x) = x^2 + 6x - A$$

となる。

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(t) dt &= \int_0^3 (t^2 + 6t - A) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + 3t^2 - At \right]_0^3 \\ &= 36 - 3A\end{aligned}$$

であるから、

$$36 - 3A = A$$

$$\Leftrightarrow A = 9$$

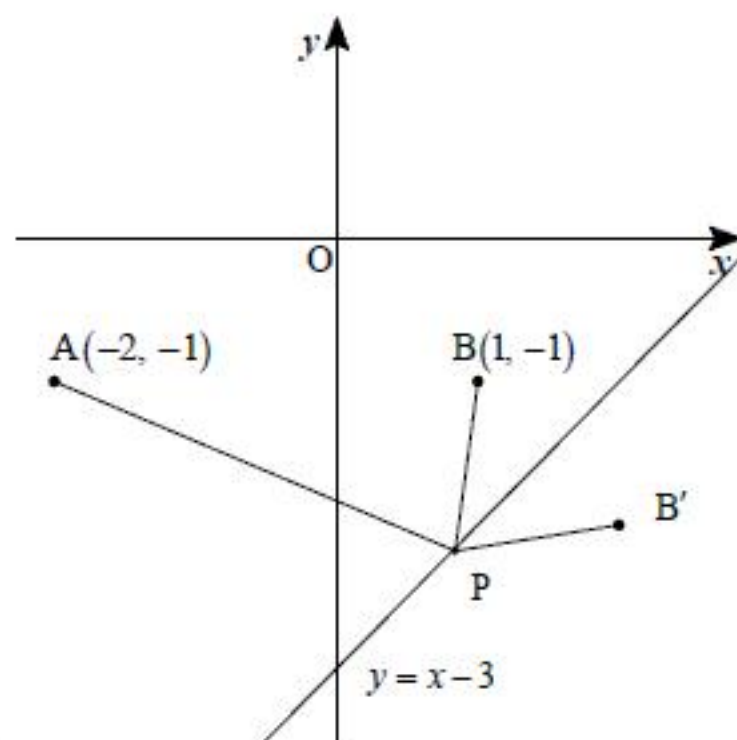
となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

4 E

〔解説〕



点Bと直線 $y = x - 3$ に関して対称な点を点 B' とする。点 $B'(a, b)$ とおくと、点Bと点 B' の中点 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$ が直線 $y = x - 3$ 上にあることから

$$\begin{aligned}\frac{-1+b}{2} &= \frac{1+a}{2} - 3 \\ \Leftrightarrow a &= 4 + b\end{aligned}$$

である。また、直線 $y = x - 3$ の傾きは1だから、直線 BB' の傾きは -1 となる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{b+1}{a-1} &= -1 \\ \Leftrightarrow b &= -a\end{aligned}$$

となる。以上より、 $a = 2, b = -2$ である。点 B' は点Bのと直線 $y = x - 3$ に関して対称な点だから、

$$AP + PB = AP + PB'$$

である。 $AP + PB'$ が最小になるとき、点Pは直線 $y = x - 3$ と直線 AB' の交点となり、そのとき $AP + PB' = AB'$ である。以上より、 $AP + PB$ の最小値は

$$\sqrt{\{2 - (-2)\}^2 + \{(-2) - (-1)\}^2} = \sqrt{17}$$

である。

〔IV〕

〔解答〕

$$(1) \quad 5 \quad G \quad 6 \quad E$$

$$(2) \quad 101 \quad \frac{945}{946}$$

〔解説〕

- (1)
座席は30席あり、その中から欠席者2名の席の選び方は

$$\begin{aligned} {}_{30}C_2 &= \frac{30 \cdot 29}{2} \\ &= 435 \text{ 通り} \end{aligned}$$

である。また、欠席者2人の座席が同じ机にあるような座席の位置の組み合わせは、机を1つ選ぶ方法の総数に等しく、15通りである。よって、すべての机に少なくとも1名が座っているときの欠席者の座席の位置の組み合わせは、

$$435 - 15 = 420 \text{ 通り}$$

である。

- (2)
座席は45席あり、その中から欠席者3名の席の選び方、つまり受験生の座席の選び方の総数は

$$\begin{aligned} {}_{45}C_3 &= \frac{45 \cdot 44 \cdot 43}{3 \cdot 2} \\ &= 14190 \text{ 通り} \end{aligned}$$

である。また、1人も座っていない机があるような欠席者の座席の位置の組み合わせは、机を1つ選ぶ方法の総数に等しく、15通りである。よって、各机の欠席者の人数が多くても2名である確率、つまり、すべての机に少なくとも1名が座っている確率は、

$$\frac{14190 - 15}{14190} = \frac{945}{946}$$

である。

〔V〕

〔解答〕

7 H 8 C 9 G 10 H 11 E 12 F 13 D 14 G

$$102 \quad \frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$$

〔解説〕

$$\begin{aligned}\frac{n+4}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} \\ \Leftrightarrow \frac{n+4}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

が n の恒等式であるとする、

$$\begin{aligned}a+b+c &= 0, \\ 3a+2b+c &= 1, \\ 2a &= 4\end{aligned}$$

となる。これより、 $a=2, b=-3, c=1$ と求まる。よって、恒等式

$$\frac{n+4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n} + \frac{-3}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

が成り立つ。この恒等式を利用すると

$$\begin{aligned}a_n + a_{n+1} + a_{n+2} &= \left(\frac{2}{n} + \frac{-3}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{2}{n+1} + \frac{-3}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) + \left(\frac{2}{n+2} + \frac{-3}{n+3} + \frac{1}{n+4} \right) \\ &= \frac{2}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{-2}{n+3} + \frac{1}{n+4}\end{aligned}$$

となる。 n を 3 で割った余りで場合分けをして、 $n \geq 3$ において $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ を求める。 m を 1

以上の整数として、

[1] $n=3m$ のとき

$$\begin{aligned}S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{3m-2} + a_{3m-1} + a_{3m} \\ &= \left(\frac{2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{-2}{4} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{2}{4} + \frac{-1}{5} + \frac{-2}{7} + \frac{1}{8} \right) + \cdots + \left(\frac{2}{3m-2} + \frac{-1}{3m-1} + \frac{-2}{3m+1} + \frac{1}{3m+2} \right) \\ &= \frac{2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{-2}{3m+1} + \frac{1}{3m+2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{-2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

と求まる。

[2] $n=3m+1$ のとき

$$\begin{aligned}S_n &= S_{3m} + a_{3m+1} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{-2}{3m+1} + \frac{1}{3m+2} + a_{3m+1} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{-2}{n} + \frac{1}{n+1} + a_n \\ &= \frac{3}{2} + \frac{-2}{n} + \frac{1}{n+1} + \left(\frac{2}{n} + \frac{-3}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{-2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

と求まる。

[3] $n=3m+2$ のとき

$$\begin{aligned}S_n &= S_{3m} + a_{3m+1} + a_{3m+2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{-2}{3m+1} + \frac{1}{3m+2} + a_{3m+1} + a_{3m+2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{-2}{n-1} + \frac{1}{n} + a_{n-1} + a_n \\ &= \frac{3}{2} + \frac{-2}{n-1} + \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n-1} + \frac{-3}{n} + \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{2}{n} + \frac{-3}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{-2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

と求まる。

以上より、 $n \geq 3$ のとき、 $S_n = \frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$ となる。

[VI]

[解答]

15 G 16 A 17 B

[解説]

(1)

相加相乗平均より

$$t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 2$$

となる。等号は

$$3^x = 3^{-x}$$

$$\therefore x = 0$$

で成立する。したがって t の最小値は 2 である。

(2)

$t = 3^x + 3^{-x}$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= 3^{2x} - 16 \cdot 3^x - 16 \cdot 3^{-x} + 3^{-2x} - 34 \\ &= (3^x + 3^{-x})^2 - 2 - 16(3^x + 3^{-x}) - 34 \\ &= t^2 - 16t - 36 \\ &= (t - 8)^2 - 100 \end{aligned}$$

と変形できる。 $x > 0$ と (1) の結果より、 t の取りうる値の範囲は $t > 2$ であるから、 $f(x)$ の最小値は $t = 8$ のとき -100 となる。また、 $f(x)$ が最小値をとる x は $3^x + 3^{-x} = 8$ を満たす。 $3^x + 3^{-x}$ は $x > 0$ において単調増加し、

$$3^1 + 3^{-1} = 3 + \frac{1}{3} < 8,$$

$$3^2 + 3^{-2} = 9 + \frac{1}{9} > 8$$

より、このような x は $1 < x < 2$ の範囲にあることがわかる。よって、求める n は $n = 1$ である。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

18 E 19 G 20 D

〔解説〕

(1)

中心 O から水面に下ろした垂線の足を点 A、また、水面と下水管の境界のある 1 点を点 B とすると

$$\cos \angle AOB = \frac{1-0.50}{1.00} = 0.500$$

である。よって $\angle AOB \approx \frac{\pi}{3}$ 、 $2\angle AOB = \frac{2}{3}\pi \approx 2.09$ であることがわかる。

ゆえに断面積は

$$\begin{aligned} & \pi \cdot 1.00^2 \cdot \frac{2.09}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot 1.00^2 \sin 2.09 \\ &= 1.045 - 0.500 \cdot 0.87 \quad (\because \sin 1.05 = \sin 2.09 = 0.87) \\ &= 0.61 [\text{m}^2] \end{aligned}$$

と求まる。これに最も近い記号は E である。

(2)

(1)と同様に点をおき、 $\angle AOB$ は鋭角であることに注意する。

$$\cos \angle AOB = \frac{1.57-1.00}{1.00} = 0.57$$

である。 $\cos 0.96 = 0.57$ より $\angle AOB = 0.96$ である。よって断面積は

$$\begin{aligned} & \pi \cdot 1.00^2 - \left(\pi \cdot 1.00^2 \cdot \frac{1.92}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot 1.00^2 \sin 1.92 \right) \\ &= \pi - 0.96 + \frac{1}{2} \sin 1.92 \\ &= 3.14 - 0.96 + 0.47 \\ &= 2.65 [\text{m}^2] \end{aligned}$$

と求まる。これに最も近い記号は G である。

(3)

1 分間に増える断面積は

$$\frac{2.65-0.61}{29} \approx 0.070 [\text{m}^2 / \text{min}]$$

である。残りの断面積は(2)より

$$\pi \cdot 1.00^2 - 2.65 = 0.49 [\text{m}^2]$$

なので、下水管が満たされるまでにかかる時間は

$$\frac{0.49}{0.070} = 7 [\text{min}]$$

と求まる。よって下水管が水で満たされる時刻はおよそ 15 時 36 分である。これに最も近い記号は D である。