

〔 I 〕

〔解答〕

- | | |
|----------|------|
| (1) 最大 B | 最小 C |
| (2) 最大 C | 最小 A |
| (3) 最大 B | 最小 A |
| (4) 最大 B | 最小 C |
| (5) 最大 C | 最小 A |

〔解説〕

(1)

$$\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{27} = 3^{\frac{3}{3}}, \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$$

であり,

$$3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}} > 3^{\frac{2}{7}}$$

$$3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{9}} < 3^{\frac{3}{3}}$$

より

$$\sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{9}$$

となる。

(2)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -9$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = -7$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 7$$

となる。

(3)

$$\left(\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot i^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2} - i\right)\left(\frac{1}{2} + i\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - i^2 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{i-1}{i} - i = \frac{i-1}{i} + \frac{1}{i} = 1$$

となる。

(4)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-1)(x^2 + 1) \\ &= -4 \end{aligned}$$

となる。

(5)

$y = 2^x$ のグラフを x 軸方向に 3 移動すると

$$y = 2^{(x-3)}$$

となるから, これを直線 $y = x$ に関して対称移動すると

$$x = 2^{(y-3)}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = y - 3$$

$$\therefore y = \log_2 x + 3$$

と一致する。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1) ア 7 イ 7 ウ 8 エ 2

(2) オ 5 カ 4

(3) キ 7 ク 0 ケ 5 コ 6

〔解説〕

(1)

$\overline{B \cup C}$ は 2 の倍数でも 5 の倍数でもない数の集合であるから、 $\overline{B \cup C} \cap D$ は 2 の倍数でも 5 の倍数でもない 7 の倍数の集合である。よって $A \cap (\overline{B \cup C} \cap D)$ 、すなわち $\overline{B \cup C} \cap D$ の数のなかで 90 以下であるものに含まれる最大の整数は 77 である。

$\overline{B \cap C} \cup D = (B \cap C) \cap \overline{D}$ より、 $\overline{B \cap C} \cup D$ に含まれない数は 7 の倍数ではないが 10 の倍数である数である。90 以下でそのような数は 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90 の 8 つであるから、

$A \cap (\overline{B \cap C} \cup D)$ に含まれる要素の数は

$$90 - 8 = 82$$

である。

(2)

$$0.\dot{a}\dot{b} + 0.\dot{b}\dot{a} = 0.\dot{9} = 0.\dot{9}\dot{9}$$

$$\Leftrightarrow (10a + b) + (10b + a) = 99$$

$$0.\dot{a}\dot{b} - 0.\dot{b}\dot{a} = 0.\dot{0}\dot{9}$$

$$\Leftrightarrow (10a + b) - (10b + a) = 9$$

より、

$$\begin{cases} (10a + b) + (10b + a) = 99 \\ (10a + b) - (10b + a) = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 9 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 9 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

$$\therefore a = 5, b = 4$$

となる。

(3)

二項定理より、 $f(x)$ の x^4 の係数は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 2^{7-4} \cdot {}_7C_4 = \frac{35}{2}$$

であるから、 $f'(x)$ の x^3 の係数は

$$4 \cdot \frac{35}{2} = 70$$

である。また、 $f(x)$ の x^2 の係数は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^{7-2} \cdot {}_7C_2 = 168$$

であるから、 $\int f(x) dx$ の x^3 の係数は

$$\frac{1}{3} \cdot 168 = 56$$

である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1) 13

(2) サ $\beta^{n-1}(1-\alpha)$ シ $\alpha^{n-1}(1-\beta)$ ス $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ セ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 ソ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ タ $1+\sqrt{5}$ チ $1-\sqrt{5}$

〔解説〕

(1)

定義により計算して

$$\begin{aligned} a_3 &= 1+1=2 \\ a_4 &= 2+1=3 \\ a_5 &= 3+2=5 \\ a_6 &= 5+3=8 \\ a_7 &= 8+5=13 \end{aligned}$$

を得る。

(2)

数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は初項 $1-\alpha$ 、公比 β の等比数列であるから、この数列の一般項は

$$a_{n+1}-\alpha a_n = \beta^{n-1}(1-\alpha)$$

であり、また数列 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ は初項 $1-\beta$ 、公比 α の等比数列であるから、この数列の一般項は

$$a_{n+1}-\beta a_n = \alpha^{n-1}(1-\beta)$$

となる。よって

$$(\beta-\alpha)a_n = \beta^{n-1}(1-\alpha) - \alpha^{n-1}(1-\beta)$$

となる。ここで、 α, β は $x^2-x-1=0$ の2解であるから、 $\alpha \leq \beta$ に注意すると

$$\begin{aligned} x^2-x-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \therefore \alpha &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\beta-\alpha} \{ \beta^{n-1}(1-\alpha) - \alpha^{n-1}(1-\beta) \} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \{ \beta^{n-1}(1-\alpha) - \alpha^{n-1}(1-\beta) \} \end{aligned}$$

であり、 $\alpha+\beta=1$ より $1-\alpha=\beta, 1-\beta=\alpha$ であるから、求める一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt{5}}{5} \{ \beta^{n-1} \cdot \beta - \alpha^{n-1} \cdot \alpha \} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

(1) ツ E テ O ト O ナ N

(2) x^4, x^6

(3) x^3, x^5

(4) $h(x) - h(-x)$

(5) $\frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}$

(6)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 3x^2 (\sin x + \cos x)^2 dx &= \int_{-2}^2 3x^2 (1 + 2\sin x \cos x)^2 dx \\ &= 3 \int_{-2}^2 x^2 dx + 6 \int_{-2}^2 x^2 \sin x \cos x dx \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。ここで、 $\sin x$ は奇関数、 $\cos x$ は偶関数であるから、(1)の結果より $\sin x \cos x$ は奇関数である。また、 x^2 は偶関数であるから、 $x^2 \sin x \cos x$ は偶関数と奇関数の積であり、奇関数である。よって①より

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 3x^2 (\sin x + \cos x)^2 dx &= 2 \cdot 3 \int_0^2 x^2 dx \\ &= 6 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= 16\end{aligned}$$

となる。

(答) 16

〔解説〕

(1)

$\frac{1}{f(x)}$, $-f(x)$ はどちらも $f(x)$ が奇関数のときは

$$\frac{1}{f(-x)} = -\frac{1}{f(x)}, -f(-x) = f(x)$$

となるので奇関数であり、 $f(x)$ が偶関数のときは

$$\frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{f(x)}, -f(-x) = -f(x)$$

となるので偶関数であるから、商については積を、差については和を調べれば十分である。 $f(x)$ と $g(x)$ がともに奇関数のとき

$$f(-x)g(-x) = \{-f(x)\}\{-g(x)\} = f(x)g(x)$$

となるから、奇関数の積（商）は偶関数であり、また $f(x)$ が偶関数、 $g(x)$ が奇関数のとき

$$f(-x)g(-x) = f(x)\{-g(x)\} = -f(x)g(x)$$

となるから、偶関数と奇関数の積（商）は奇関数である。

また、 $f(x)$ と $g(x)$ がともに奇関数のとき

$$f(-x) + g(-x) = \{-f(x)\} + \{-g(x)\} = -\{f(x) + g(x)\}$$

となるから、奇関数の和（差）は奇関数であり、また $f(x)$ が偶関数、 $g(x)$ が奇関数のとき

$$f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$$

となるから、偶関数と奇関数の和（差）は偶関数でも奇関数でもない。

(2)

$$(-x)^4 = x^4, (-x)^6 = x^6$$

より、 x^4, x^6 は偶関数である。

(3)

$$(-x)^3 = -x^3, (-x)^5 = -x^5$$

より、 x^3, x^5 は奇関数である。

(4)

$$h(x) - \frac{1}{2}\{h(x) + h(-x)\} = \frac{1}{2}\{h(x) - h(-x)\}$$

より、

$$h(x) = \frac{1}{2}\{h(x) + h(-x)\} - \frac{1}{2}\{h(x) - h(-x)\}$$

である。

(5)

(4)の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{-x+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{-x+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(-x+1) + (x+1)}{(x+1)(-x+1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-x+1) - (x+1)}{(x+1)(-x+1)} \\ &= \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}\end{aligned}$$

という偶関数と奇関数の和で表せる。

〔V〕

〔解答〕

(1) $\sqrt{2}$

(2) $\alpha + \beta = m - 7, \alpha\beta = \frac{(2m-7)^2}{2}$

(3) 最大値 $2\sqrt{7}$ ($m=3$)

〔解説〕

(1)

$$P(\alpha, \alpha - m + 7), Q(\beta, \beta - m + 7)$$

より

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + \{(\alpha - m + 7) - (\beta - m + 7)\}^2} \\ &= \sqrt{2}|\alpha - \beta| \end{aligned}$$

となる。

(2)

α, β は円と直線の交点の x 座標であるから、

$$x^2 + (x - m + 7)^2 + 2mx - 2m(x - m + 7) + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (14 - 2m)x + 4m^2 - 28m + 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2(m - 7)x + (2m - 7)^2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

の2解となる。よって解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = m - 7, \alpha\beta = \frac{(2m - 7)^2}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha + \beta = m - 7, \alpha\beta = \frac{(2m - 7)^2}{2}$$

(3)

点 P, Q が存在するのは、 $\textcircled{1}$ が異なる2解をもつときであるから、 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 7)^2 - 2 \cdot (2m - 7)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow -7m^2 + 42m - 49 > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が点 P, Q の存在条件である。ここで、(1)の結果より、線分 PQ の長さは $\sqrt{2}|\alpha - \beta|$ であり、(2)の結果より

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (m - 7)^2 - 4 \cdot \frac{(2m - 7)^2}{2} \\ &= -7m^2 + 42m - 49 \\ &= -7(m - 3)^2 + 14 \end{aligned}$$

となるから、 $\textcircled{2}$ の条件に注意すると $(\alpha - \beta)^2$ 、すなわち $\sqrt{2}|\alpha - \beta|$ は $m = 3$ のとき最大値をと

り、このときの最大値は

$$\begin{aligned} \sqrt{2}|\alpha - \beta| &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{14} \\ &= 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad m = 3 \text{ のとき最大値 } 2\sqrt{7}$$