

〔Ⅰ〕

〔解答〕

- (1) ア 1 イ 8
 (2) ウ 6 エ 2 オ 2 カ 7 キ 6
 (3) ク 1

〔解説〕

(1)

$10^x = 15^{15}$ とおく。両辺で常用対数をとると、

$$\begin{aligned} x &= \log_{10} 15^{15} \\ &= 15 \log_{10} 15 \\ &= 15 \log_{10} \frac{30}{2} \\ &= 15 (\log_{10} 10 + \log_{10} 3 - \log_{10} 2) \\ &= 15 (1 + 0.4771 - 0.3010) \\ &= 15 \cdot 1.1761 \\ &= 17.6415 \end{aligned}$$

となるので、 $10^{17} < 15^{15} < 10^{18}$ である。よって、 15^{15} は 18 桁の数字である。

(2)

$$\begin{aligned} &4 \sin \theta + 2 \cos 2\theta - \sin 2\theta \cos \theta \\ &= 4 \sin \theta + 2(1 - 2 \sin^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos^2 \theta \\ &= -4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta + 2 - 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) \\ &= 2 \sin^3 \theta - 4 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 2 \end{aligned}$$

と変形できる。 $\sin \theta = t$ とおくと、 $-1 \leq t \leq 1$ であり、

$$2 \sin^3 \theta - 4 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 2 = 2t^3 - 4t^2 + 2t + 2$$

となる。 $f(t) = 2t^3 - 4t^2 + 2t + 2$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 6t^2 - 8t + 2 \\ &= 2(3t - 1)(t - 1) \end{aligned}$$

となるので、 $f(t)$ の増減表は下記の通りである。

t	-1	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	0
$f(t)$		↗		↘	

$$\begin{aligned} f(-1) &= -6 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{2}{27} - \frac{4}{9} + \frac{2}{3} + 2 = \frac{62}{27} \\ f(1) &= 2 \end{aligned}$$

であるから、 $f(t)$ は、

$$\begin{aligned} t = \frac{1}{3} \text{ のとき、最大値 } &\frac{62}{27} \\ t = -1 \text{ のとき、最小値 } &-6 \end{aligned}$$

をとる。したがって、 $4 \sin \theta + 2 \cos 2\theta - \sin 2\theta \cos \theta$ は、最大値 $\frac{62}{27}$ 、最小値 -6 をとる。

(3)

$${}_{2014}C_{1007} = \frac{2014 \cdot 2013 \cdots 1008}{1007 \cdot 1006 \cdots 1}$$

である。まず、分母と分子がそれぞれ13で最大何回割り切れるかを調べる。

[1] 分母について、1 から 1007 までの整数の中で

n	n で割り切れる整数	その個数
13	13・1, 13・2, ..., 13・77	77
$13^2 = 169$	169・1, 169・2, ..., 169・5	5

より、分母は13で最大 $77 + 5 = 82$ 回割り切れる。

[2] 分子について、1008 から 2014 までの整数の中で

n	n で割り切れる整数	その個数
13	13・78, 13・79, ..., 13・154	77
$13^2 = 169$	169・6, 169・7, ..., 169・11	6

より、分子は13で最大 $77 + 6 = 83$ 回割り切れる。

以上より、 ${}_{2014}C_{1007}$ は13で最大 $83 - 82 = 1$ 回割り切れる。そこで、 ${}_{2014}C_{1007}$ が偶数であるかどうかを調べる。

$$\begin{aligned} {}_{2014}C_{1007} &= \frac{2014!}{1007!1007!} \\ &= \frac{2014 \cdot 2013!}{1007 \cdot 1006!1007!} \\ &= 2 \cdot \frac{2013!}{1006!1007!} \\ &= 2 \cdot {}_{2013}C_{1006} \end{aligned}$$

が成立するので、 ${}_{2014}C_{1007}$ は偶数である。よって、 $26 = 13 \cdot 2$ で最大 1 回割り切れる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア ⑧ イ ⑨ ウ ① エ 3 オ 4
 カ 5 キ 2 ク 3 ケ 4 コ 3
 サ 3 シ 5 ス 1 セ 3 ソ 3

〔解説〕

(1)

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = p^2 + q^2 + 2pqt$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = p^2 + q^2 - 2pqt$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = p^2 - q^2$$

となる。

(2)

内積の定義式を2乗して

$$\{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})\}^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 |\vec{a} - \vec{b}|^2 \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4} |\vec{a} + \vec{b}|^2 |\vec{a} - \vec{b}|^2$$

を得る。これに、(1)の結果を代入すると、

$$\begin{aligned} (p^2 - q^2)^2 &= \frac{1}{4} (p^2 + q^2 + 2pqt)(p^2 + q^2 - 2pqt) \\ &= \frac{1}{4} (p^2 + q^2)^2 - p^2 q^2 t^2 \end{aligned}$$

$$\therefore t^2 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{q^2}{p^2} + \frac{5}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{p^2}{q^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。

(3)

$x = \frac{q}{p}$ とおく。問題文の条件より、

$$0 < x < 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

であることに注意する。 $\theta = 90^\circ$ のとき、 $t = \cos \theta = 0$ であるから、①より

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2} - \frac{3}{4x^2} \\ \Leftrightarrow 3x^4 - 10x^2 + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x^2 - 1)(x^2 - 3) &= 0 \\ \therefore x &= \pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

となり、②を考えると、 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ であることがわかる。

(4)

$p > 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned} |\vec{b}|^2 &= |\vec{a} - \vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow q^2 &= p^2 + q^2 - 2pqt \\ \Leftrightarrow p(p - 2qt) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{p}{2q} = \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

となることがわかる。これを①に代入して、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2x}\right)^2 &= -\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2} - \frac{3}{4x^2} \\ \Leftrightarrow 3x^4 - 10x^2 + 4 &= 0 \\ \therefore x^2 &= \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3} \end{aligned}$$

となる。②により、 $0 < x^2 < 1$ であることに注意すれば、 $x^2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{3}$ であり、ゆえに

$$x = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{13}}{3}}$$

と求まる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

- (1) 5
 (2) 2
 (3) 1 5
 (4) 1 5

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}\{x - (3 + \sqrt{6})\}\{x - (3 - \sqrt{6})\} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 3 - \sqrt{6} &\leq x \leq 3 + \sqrt{6} \end{aligned}$$

である。ここで、 $2 < \sqrt{6} < 3$ より

$$0 < 3 - \sqrt{6} < 1, 5 < 3 + \sqrt{6} < 6$$

となるから、求める整数 x の値は $x = 1, 2, 3, 4, 5$ となり、全部で 5 個ある。

(2)

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{8}x^2 + x \\ &= -\frac{1}{8}(x - 4)^2 + 2 \end{aligned}$$

より、 $g(x) \geq a$ を満たす整数 x が存在しないならば、 $a \leq 2$ を満たす任意の a について、 $g(x) \geq a$ を満たす x の値として $x = 4$ が存在するから、 $a > 2$ が必要である。逆に、 $a > 2$ とすると、 $g(x) \geq a$ を満たす x の値は存在しないからこれは十分条件でもある。したがって、求める必要十分条件は「 a は 2 より大きい」である。

(3)

$y \leq g(x)$ かつ $y \geq 0$ を満たす整数の組 (x, y) の数は、 $y \leq g(x)$ かつ $y \geq 0$ を満たす領域の中に含まれる格子点の数の数に等しい。ここで、

$$g(x) = -\frac{1}{8}x(x - 8) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 8$$

より、 x の値としてあり得るのは、 $x = 0, 1, 2, \dots, 8$ である。次に、各 x の値について、 y の値の取り得る範囲を考える。 $y = g(x)$ のグラフの対称性を利用して、以下のように場合分けする。

[1] $x = 0, 8$ のとき

$g(0) = g(8) = 0$ より、取り得る y の値は $y = 0$ のみである。

[2] $x = 1, 7$ のとき

$g(1) = g(7) = \frac{7}{8}$ より、取り得る y の値は $y = 0$ のみである。

[3] $x = 2, 6$ のとき

$g(2) = g(6) = \frac{3}{2}$ より、取り得る y の値は $y = 0, 1$ である。

[4] $x = 3, 5$ のとき

$g(3) = g(5) = \frac{15}{8}$ より、取り得る y の値は $y = 0, 1$ である。

[5] $x = 4$ のとき

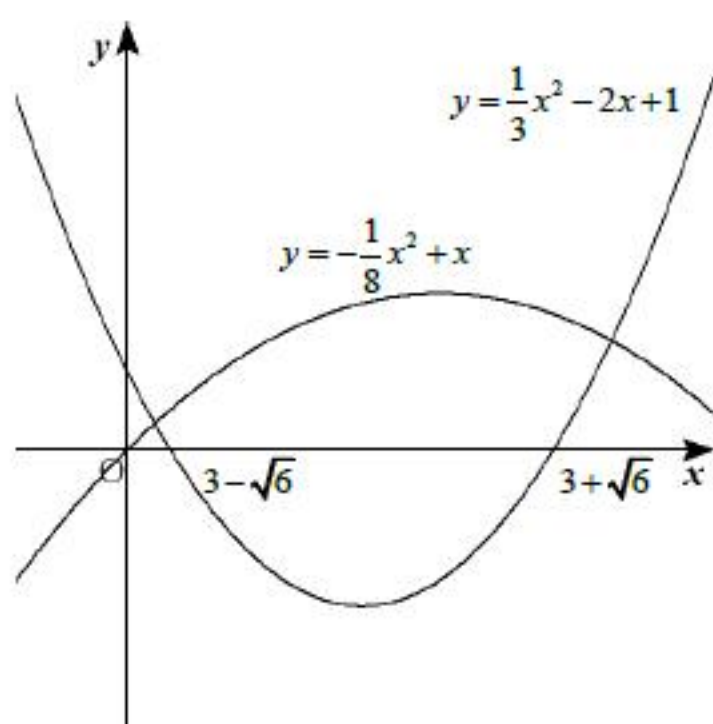
$g(4) = 2$ より、取り得る y の値は $y = 0, 1, 2$ である。

以上、より、整数の組 (x, y) の数は

$$2 \times (1 + 1 + 2 + 2) + 3 = 15$$

となる。

(4)



(1)より、 $y = f(x)$ の放物線は x 軸と $x = 3 \pm \sqrt{6}$ で交わり、 $0 < 3 - \sqrt{6} < 1, 5 < 3 + \sqrt{6} < 6$ である。ここで、

$$g(1) = \frac{7}{8}, f(1) = -\frac{2}{3}, g(0) = 0, f(0) = 1$$

$$g(6) = \frac{3}{2}, f(6) = 1, g(7) = \frac{7}{8}, f(7) = \frac{10}{3}$$

より、 $g(1) > f(1), g(0) < f(0), g(6) > f(6), g(7) < f(7)$ だから、上図より $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の放物線の 2 つの交点の x 座標はそれぞれ 0 と 1 の間と、6 と 7 の間に存在することがわかる。したがって、 $y \geq f(x)$ かつ $y \leq g(x)$ を満たす整数 x の値として、 $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ が考えられる。次に、各 x の値について、 y の値の取り得る範囲を考える。

[1] $x = 1$ のとき

$f(1) = -\frac{2}{3}, g(1) = \frac{7}{8}$ より、取り得る y の値は $y = 0$ のみである。

[2] $x = 2$ のとき

$f(2) = -\frac{5}{3}, g(2) = \frac{3}{2}$ より、取り得る y の値は $y = -1, 0, 1$ である。

[3] $x = 3$ のとき

$f(3) = -2, g(3) = \frac{15}{8}$ より、取り得る y の値は $y = -2, -1, 0, 1$ である。

[4] $x = 4$ のとき

$f(4) = -\frac{5}{3}, g(4) = 2$ より、取り得る y の値は $y = -1, 0, 1, 2$ である。

[5] $x = 5$ のとき

$f(5) = -\frac{2}{3}, g(5) = \frac{15}{8}$ より、取り得る y の値は $y = 0, 1$ である。

[6] $x = 6$ のとき

$f(6) = 1, g(6) = \frac{3}{2}$ より、取り得る y の値は $y = 1$ のみである。

以上より、整数の組 (x, y) の数は

$$1 + 3 + 4 + 4 + 2 + 1 = 15$$

となる。