

〔Ⅰ〕

[解答]

ア 0	イ 1	ウ 1	エ 0	オ 9	カ 3	キ 9
ク 2	ケ 3	コ 3	サ 2	シ 5	ス 9	

[解説]

(1)

$$A(m, n)A(n, m) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。 $A(m, n)$ は回転角が $\theta(m, n)$ であるから

$$A(m, n) = \begin{pmatrix} \cos \theta(m, n) & -\sin \theta(m, n) \\ \sin \theta(m, n) & \cos \theta(m, n) \end{pmatrix}$$

すると,

$$A(m, n)A(n, m) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(m, n) + \theta(n, m)) & -\sin(\theta(m, n) + \theta(n, m)) \\ \sin(\theta(m, n) + \theta(n, m)) & \cos(\theta(m, n) + \theta(n, m)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と $0 < \theta(m, n) < \frac{\pi}{2}$ より,

$$\theta(m, n) + \theta(n, m) = \frac{\pi}{2}$$

である。ここで、 m, n の目の出方は36通りであるから、全ての目についての和は、

$$36 \times \frac{\pi}{2} = 18\pi$$

である。ここで、 m, n を入れ替えても全く同様の計算ができるので、全ての m, n の目の出方にたいする $\theta(m, n)$ の和は

$$9\pi$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} \sin \sqrt{3}x + \sqrt{3}e^{-x} \cos \sqrt{3}x \\ &= 2e^{-x} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \sqrt{3}x - \frac{1}{2} \sin \sqrt{3}x \right) \\ &= 2e^{-x} \cos \left(\sqrt{3}x + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

となり、極大値を取るのは、 $\cos \left(\sqrt{3}x + \frac{\pi}{6} \right)$ が正から負に変わるときである。 $x \geq 0$ であることに注意して、 n を正の整数として

$$\sqrt{3}x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi$$

が満たすべき条件である。したがって、

$$x_n = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi + \frac{2}{3}\sqrt{3}(n-1)\pi$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} f(x_n) &= e^{-x_n} \sin \sqrt{3}x_n \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-x_n} \end{aligned}$$

である。このとき第 n 項が $f(x_n)$ である級数の和は、初項 $\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{9}\pi}$ 、公比 $e^{-\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi}$ であり、

$$0 < e^{-\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi} < 1$$

であるから、収束し、その値は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) &= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{\sqrt{3}}{9}\pi} \frac{1}{1 - e^{-\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{9}\pi}}{e^{-\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi} - 1} \end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

[解答]

ア 0 イ 3 ウ 1 エ 3 オ 1 カ 1
 キ 3 ク 3 ケ 2 コ 3 サ 3 シ 1

[解説]

まず、 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ において、

$$\tan x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

である。次に、 C_1 と C_2 の交点の x 座標を α とすると、

$$\begin{aligned}\cos \frac{\alpha}{2} &= \tan \alpha \\ &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

であるから、

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1 = 0$$

である。ここで、 $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ であるから

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3} - 1$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right)^2 \\ &= \sqrt{3} - 1\end{aligned}$$

である。また、 C_1 と C_3 の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned}\cos \frac{x}{2} &= \sin x \\ \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

である。以上より、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned}S &= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}} \cos \frac{x}{2} dx + \int_0^{\alpha} \tan x dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx \\ &= \left[2 \sin \frac{x}{2} \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\log(\cos x) \right]_0^{\alpha} + \left[\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2 - \sqrt{3} - \log(\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \sqrt{3} - \log(\sqrt{3} - 1)\end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

【解答】

ア ② イ 1 ウ 4 エ ⑧ オ 2 カ 1 キ 2 ク ①
 ケ ② コ 2 サ 0 シ ⑤ ス 3 セ 2 ソ 2 タ 3

【解説】

(1)

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ とおくと,}$$

$$e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0$$

と変形でき、 $e^t > 0$ より、

$$e^t = \sqrt{x^2 + 1} + x$$

である。すると、

$$e^{-t} = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

である。よって、

$$\begin{aligned} dx &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt \\ &= \sqrt{x^2 + 1} dt \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 1} dx &= \int (x^2 + 1) dt \\ &= \int \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \int (e^{2t} + e^{-2t} + 2) dt \\ &= \frac{1}{8} (e^{2t} - e^{-2t}) + \frac{1}{2} t + C \\ &= \frac{1}{8} \left\{ (\sqrt{x^2 + 1} + x)^2 - (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2 \right\} + \frac{1}{2} \log(\sqrt{x^2 + 1} + x) + C \\ &= \frac{1}{2} \left\{ x\sqrt{x^2 + 1} + \log(\sqrt{x^2 + 1} + x) \right\} + C \end{aligned}$$

である。

(2)

問題文から点 (x, y) が L 上にあるための条件は、

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} &= 2 \\ \therefore y^4 + \{(x-1)^2 + (x+1)^2\} y^2 + (x-1)^2 (x+1)^2 &= 4 \\ \therefore y^4 + 2(x^2 + 1)y^2 + (x^2 + 1)(x^2 - 3) &= 0 \\ \therefore y^2 &= \pm 2\sqrt{x^2 + 1} - (x^2 + 1) \\ &= 2\sqrt{x^2 + 1} - (x^2 + 1) \quad (\because y^2 \geq 0) \end{aligned}$$

である。 $y^2 \geq 0$ より、

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2 + 1} - (x^2 + 1) &\geq 0 \\ 2 &\geq \sqrt{x^2 + 1} \\ 3 &\geq x^2 \\ -\sqrt{3} &\leq x \leq \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(3)

立体 X は、

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2} &\leq 2 \\ \therefore (y^2 + z^2)^2 + \{(x-1)^2 + (x+1)^2\} (y^2 + z^2) + (x-1)^2 (x+1)^2 &\leq 4 \end{aligned}$$

である。これは(2)と同様にして考えると、 $y^2 + z^2 \geq 0$ より、

$$0 \leq y^2 + z^2 \leq 2\sqrt{x^2 + 1} - (x^2 + 1) \quad (-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3})$$

となる。つまり、 $x = k$ ($-\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3}$) で切った断面図は、半径 $\sqrt{2\sqrt{k^2 + 1} - (k^2 + 1)}$ の円となる。したがって、求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi \left\{ 2\sqrt{k^2 + 1} - (k^2 + 1) \right\} dk \\ &= 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{k^2 + 1} dk - \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (k^2 + 1) dk \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} \left\{ x\sqrt{x^2 + 1} + \log(\sqrt{x^2 + 1} + x) \right\} \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} - 4\sqrt{3}\pi \\ &= 2\pi \left\{ 2\sqrt{3}\pi + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{2} \log(2 - \sqrt{3}) \right\} - 4\sqrt{3}\pi \\ &= \pi \log \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right) \\ &= \pi \log(2 + \sqrt{3})^2 \\ &= 2\pi \log(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

ア ① イ ⑨ ウ ⑤ エ ③ オ ⑥ カ 0 キ 8 ク ① ケ 4
 コ ④ サ 8 シ ⑨ ス 1 セ 2 ソ 8 タ 4 チ ⑧

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2tG(t^3) + t^2G'(t^3) \cdot 3t^2 \\ &= 2t \int_0^{t^3} g(x) dx + 3t^4 g(t^3) \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{t^2} = 1 \\ \frac{x^2}{t^2} + y^2 = 1 \end{cases}$$

の連立方程式を x について解くと、

$$x = \pm \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

となる。よって、

$$c(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

である。同様に交点の y 座標も $c(t)$ となる。また、 C_1 の内部の面積は

$$\pi \cdot t \cdot 1 = \pi t$$

である。ここから、 C_1 の内部の共通部分の面積を引けばよい。ここで、第 1 象限における C_1 の内部の C_1 と C_2 共通部分の面積、 C_1 と C_2 は $y = x$ に関して対称だから、 $0 < t < 1$ より、

$$2 \int_0^{c(t)} t \sqrt{1 - x^2} dx - c(t)^2$$

である。よって、

$$f(t) = \pi t - \left(8 \int_0^{c(t)} t \sqrt{1 - x^2} dx - 4c(t)^2 \right)$$

である。

$$f'(t) = \pi - 8 \int_0^{c(t)} \sqrt{1 - x^2} dx - 8t \sqrt{1 - c(t)^2} c'(t) + 8c(t) c'(t)$$

である。ここで、

$$t \sqrt{1 - c(t)^2} = c(t)$$

となるので、

$$f'(t) = \pi - 8 \int_0^{c(t)} \sqrt{1 - x^2} dx$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} f''(t) &= -8 \sqrt{1 - c(t)^2} c'(t) \\ &= -\frac{8}{(t^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\lim_{t \rightarrow +0} f'(t) = \pi$$

であり、

$$\lim_{t \rightarrow -1-0} f'(t) = \pi - 8 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 - x^2} dx$$

となり、 $x = \sin \theta$ として置換積分を行うと、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -1-0} f'(t) &= \pi - 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \pi - 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \pi - 8 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -2 \end{aligned}$$

である。次に $t = t_0$ において、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \pi &= 8 \int_0^{c(t)} \sqrt{1 - x^2} dx \\ \Leftrightarrow \int_0^{c(t)} \sqrt{1 - x^2} dx &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

となる。ソで求める面積は $\frac{\pi}{8}$ である。よって、 $f(t)$ の最大値は、

$$\begin{aligned} f(t_0) &= \pi t_0 - \left(8 \int_0^{c(t_0)} t \sqrt{1 - x^2} dx - 4c(t_0)^2 \right) \\ &= \pi t_0 - 8t_0 \cdot \frac{\pi}{8} + 4c(t_0)^2 \\ &= 4c(t_0)^2 \end{aligned}$$

である。