

【I】

【解答】

(1)

ア 2 イ 2 ウ 8 エ 1 オ 2 カ 4

(2)

キ 2 ク 5 ケ 2 コ 5 サ 1 シ 0
ス 2 セ 2 ソ 5

【解説】

(1)

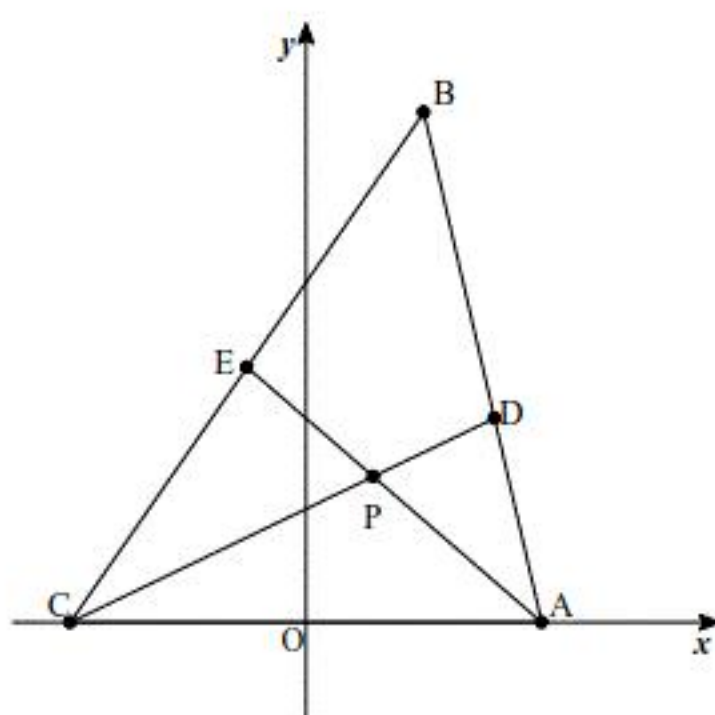
$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

のとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2e^{-2x}(1+e^{-2x}) - e^{-2x} \cdot (-2e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2} \\ &= -2 \cdot \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} + 2 \left(\frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \right)^2 \\ &= 2 \cdot \{f(x)\}^2 - 2 \cdot f(x), \\ f''(x) &= 4f(x)f'(x) - 2f'(x) \\ &= 4f(x) \left[2\{f(x)\}^2 - 2f(x) \right] - 2 \left[2\{f(x)\}^2 - 2f(x) \right] \\ &= 8 \cdot \{f(x)\}^3 - 12 \cdot \{f(x)\}^2 + 4 \cdot f(x) \end{aligned}$$

と求まる。

(2)



(a)

$$\begin{aligned} \text{CP} : \text{PD} &= s : 1-s, \\ \text{AP} : \text{PE} &= t : 1-t \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{AP}} &= s\overrightarrow{\text{AD}} + (1-s)\overrightarrow{\text{AC}} \\ &= \frac{2}{3}s\overrightarrow{\text{AB}} + (1-s)\overrightarrow{\text{AC}}, \\ \overrightarrow{\text{AP}} &= t\overrightarrow{\text{AE}} \\ &= \frac{1}{2}t\overrightarrow{\text{AB}} + \frac{1}{2}t\overrightarrow{\text{AC}} \end{aligned}$$

と2通りに表すことができる。 $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AC}}$ は1次独立であるから、係数を比較して、

$$\begin{cases} \frac{2}{3}s = \frac{1}{2}t \\ 1-s = \frac{1}{2}t \end{cases} \quad \therefore (s, t) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

と求まるので、 $\overrightarrow{\text{AP}} = \frac{2}{5}\overrightarrow{\text{AB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\text{AC}}$ である。

(b)

$\triangle \text{AEB}$ と $\triangle \text{AEC}$ において、

$$\begin{aligned} \text{AE} &= \text{AE} \quad (\text{共通}) \\ \text{BE} &= \text{EC} \quad (\text{問題の仮定}) \end{aligned}$$

$$\angle \text{AEB} = \angle \text{AEC} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{問題の仮定})$$

より、二辺挟角相等であるから、 $\triangle \text{AEB} \equiv \triangle \text{AEC}$ であり、したがって、 $\text{AB} = \text{AC} = 2$ となる。

これより、点Bの軌跡は中心(1, 0)、半径2の円の一部分であることがわかる。

(c)

(b)より、 θ を用いて、 $\text{B}(2\cos\theta+1, 2\sin\theta)$ と表すことができる。ただし、 $-1 < x < 1, 0 < y$ であ

ったことから、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ である。

$0 < p < 1$ を用いて、 $\overrightarrow{\text{AD}} = p\overrightarrow{\text{AB}}$ と表せば、 $\overrightarrow{\text{AB}}$ と $\overrightarrow{\text{CD}}$ が直交することから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{CD}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AB}} \cdot (\overrightarrow{\text{AD}} - \overrightarrow{\text{AC}}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\cos\theta, 2\sin\theta) \cdot (2p\cos\theta+2, 2p\sin\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4p\cos^2\theta + 4\cos\theta + 4p\sin^2\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 4p + 4\cos\theta &= 0 \\ \therefore p &= -\cos\theta \end{aligned}$$

が成り立つ。一方、(a)と同様にして、

$$\begin{aligned} \text{CP} : \text{PD} &= q : 1-q, \\ \text{AP} : \text{PE} &= r : 1-r \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{AP}} &= q\overrightarrow{\text{AD}} + (1-q)\overrightarrow{\text{AC}} \\ &= pq\overrightarrow{\text{AB}} + (1-q)\overrightarrow{\text{AC}}, \\ \overrightarrow{\text{AP}} &= r\overrightarrow{\text{AE}} \\ &= \frac{1}{2}r\overrightarrow{\text{AB}} + \frac{1}{2}r\overrightarrow{\text{AC}} \end{aligned}$$

と2通りに表すことができるから、係数を比較して、

$$\begin{cases} pq = \frac{1}{2}r \\ 1-q = \frac{1}{2}r \end{cases} \quad \therefore (q, r) = \left(\frac{1}{1+p}, \frac{2p}{1+p} \right)$$

と求まるので、 $\overrightarrow{\text{AP}} = \frac{p}{1+p}\overrightarrow{\text{AB}} + \frac{p}{1+p}\overrightarrow{\text{AC}}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OP}} &= \overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{AP}} \\ &= (1, 0) + \frac{p}{1+p}(2\cos\theta, 2\sin\theta) + \frac{p}{1+p}(-2, 0) \\ &= \left(1 + 2\cos\theta, \frac{-\sin 2\theta}{1-\cos\theta} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$f(\theta) = \frac{-\sin 2\theta}{1-\cos\theta}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{-2\cos 2\theta(1-\cos\theta) - (-\sin 2\theta) \cdot \sin\theta}{(1-\cos\theta)^2} \\ &= \frac{-2(2\cos^2\theta-1)(1-\cos\theta) + 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta}{(1-\cos\theta)^2} \\ &= \frac{-2(\cos^2\theta - \cos\theta - 1)}{1-\cos\theta} \\ &= \frac{-2}{1-\cos\theta} \left(\cos\theta - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(\cos\theta - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。 $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ に注意すると、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ において $1-\cos\theta > 0$ かつ

$\cos\theta - \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 0$ であるから、 $f'(\theta)$ の符号は $\cos\theta - \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ の符号に一致する。 α を

$\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ となるような角とすれば、以下のような増減表が書ける。

θ	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$	...	α	...	(π)
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって、 $f(\theta)$ 、つまり、Pのy座標は $\theta = \alpha$ のときに最大となり、このときPのx座標

は、

$$1 + 2\cos\alpha = 2 - \sqrt{5}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)

$$\text{あ } 0 \qquad \text{い } -\frac{1}{2} \qquad \text{う } -\frac{1}{2} \qquad \text{え } -1$$

(2)

$$\text{お } 0 \qquad \text{か } 2-\sqrt{2}$$

〔解説〕

(1)

正7角形の対称性より,

$$\sum_{n=0}^6 \cos n\theta = 0 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

である。さらに、 $\textcircled{1}$ において、 $\cos 0 = 1$ と

$$\begin{aligned} \cos 6\theta &= \cos(2\pi - \theta) = \cos \theta, \\ \cos 5\theta &= \cos(2\pi - 2\theta) = \cos 2\theta, \\ \cos 4\theta &= \cos(2\pi - 3\theta) = \cos 3\theta \end{aligned}$$

を用いると,

$$\begin{aligned} 1 + 2(\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta) &= 0 \\ \therefore \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

を得る。よって,

$$\begin{aligned} \cos \theta + \cos 2^2\theta + \cos 3^2\theta &= \cos \theta + \cos 4\theta + \cos 9\theta \\ &= \cos \theta + \cos 3\theta + \cos 2\theta \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。さらに,

$$(7m+k)^2 = 7(7m^2+2mk) + k^2$$

であるから、平方数 n^2 を7で割った余りの数列 $\{a_n\}$ は、周期7で、

$$1, 4, 2, 2, 4, 1, 0$$

を繰り返すことに注意すれば、 $300 = 7 \times 42 + 6$ であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{300} \cos n^2\theta &= 42(\cos \theta + \cos 2^2\theta + \cos 3^2\theta + \cos 4^2\theta + \cos 5^2\theta + \cos 6^2\theta + \cos 7^2\theta) \\ &\quad + \cos \theta + \cos 2^2\theta + \cos 3^2\theta + \cos 4^2\theta + \cos 5^2\theta + \cos 6^2\theta \\ &= -1 \end{aligned}$$

となることがわかる。

(2)

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)}{\sin \theta (\cos \theta + 1)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \theta - 1}{\sin \theta (\cos \theta + 1)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-\sin \theta}{\cos \theta + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

と求まる。

(b)

(a)の変形を利用すると,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} d\theta &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin \theta}{\cos \theta + 1} d\theta \\ &= \left[\log |\cos \theta + 1| \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-1} \\ &= \log (2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)

$$\text{さ} \quad p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

(2)

$$\text{し} \quad \frac{n(1-p)}{n+1-k}$$

(3)

す 32

〔解説〕

(1)

$n-1$ 回目のゲームまでに、A は $(k-1)$ 勝、B は $(n-k)$ 勝する。このようになる確率は

$$p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$$

である。 n 回目のゲームで A が勝つ確率を考えれば、

$$\begin{aligned} P(n) &= p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot {}_nC_{k-1} \\ &= p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} p(n+1) &= p^k \cdot (1-p)^{n+1-k} \cdot {}_nC_{k-1} \\ &= p^k \cdot (1-p)^{n+1-k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \frac{p(n+1)}{p(n)} &= \frac{p^k \cdot (1-p)^{n+1-k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!}}{p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}} \\ &= \frac{n(1-p)}{n+1-k} \end{aligned}$$

である。

(3)

(2)の答えに $k=20$, $p=0.6$ を代入すると

$$\frac{\frac{2}{5}n}{n-19} = \frac{2n}{5n-95}$$

である。このとき、

$$5n-95 < 2n \quad (1 \leq n \leq 31)$$

$$5n-95 > 2n \quad (n \geq 32)$$

であるから、

$$P(1) < \cdots < P(31) < P(32) > P(33) > P(34) > \cdots$$

となるため、 $P(n)$ を最大にする n は 32 である。

[IV]

隣接する 3 枚のカードの数の和は、全部で n 個得られる。これらをいずれか 1 つのカードを始点と決めて、 $s_1, s_2, \dots, s_n$ と順に置いていく。 $s_1, s_2, \dots, s_n$ の和を S とおくと、 S はすべてのカードの数を 3 回ずつ足すことになるから、その値は、

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n s_k \\ &= \sum_{k=1}^n k \cdot 3 \\ &= \frac{3}{2} n(n+1) \end{aligned}$$

となり、一定値になる。

以下、背理法により証明する。隣接する 3 枚のカードの数の和の最大値が $\frac{3}{2}(n+1)$ 未満である

と仮定する。したがって、 $1 \leq k \leq n$ をみたすすべての自然数 k に対して、 $s_k < \frac{3}{2}(n+1)$ が成立

している。このとき、 S を考えると、

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n s_k \\ &< \sum_{k=1}^n \frac{3}{2}(n+1) \\ &= \frac{3}{2} n(n+1) \end{aligned}$$

となる。つまり、 $S \neq \frac{3}{2} n(n+1)$ が成立するが、これは $S = \frac{3}{2} n(n+1)$ であることと矛盾する。以

上より、背理法により隣接する 3 枚のカードの数の和の最大値は $\frac{3}{2}(n+1)$ 以上であることが

証明された。

(証明終)

〔V〕

(1)

三角形の内角の和は π であるから、 $\angle A$ は、

$$\angle A = \pi - x - t$$

である。ここで、正弦定理より、

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{CA}{\sin \angle B} = \frac{AB}{\sin \angle C} = 2 \cdot 1 = 2$$

が成り立つので、

$$\begin{cases} AB = 2\sin \angle C \\ BC = 2\sin \angle A \\ CA = 2\sin \angle B \end{cases}$$

となる。よって、3辺の長さの和 ℓ は

$$\begin{aligned} \ell &= 2(\sin \angle A + \sin \angle B + \sin \angle C) \\ &= 2\{\sin(\pi - x - t) + \sin x + \sin t\} \\ &= 2\{\sin(x + t) + \sin x + \sin t\} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \ell = 2\{\sin(x + t) + \sin x + \sin t\}$$

(2)

点Cは半径1の円周上にあるので、円周角の定理より、点Cを動かしても $\angle C$ は変化しない。

よって、ここでは、 x のみを変化させてその最大値を求めればよい。 ℓ を x で微分すると、

$$\begin{aligned} \ell' &= 2\{\cos(x + t) + \cos x\} \\ &= 4\cos\left(x + \frac{t}{2}\right)\cos\frac{t}{2} \end{aligned}$$

である。 $0 < x < \pi, 0 < t < \pi$ より、 $0 < \frac{t}{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから、増減表は下のようになる。

x	(0)	...	$\frac{\pi-t}{2}$	...	(π)
ℓ'		+	0	-	
ℓ		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって ℓ の最大値は、 $x = \frac{\pi-t}{2}$ のとき $\ell = 4\cos\frac{t}{2} + 2\sin t$ である。

したがって $L(t) = 4\cos\frac{t}{2} + 2\sin t$ である。

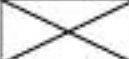
$$(\text{答}) \quad L(t) = 4\cos\frac{t}{2} + 2\sin t$$

(3)

$L(t)$ を t で微分すると、

$$\begin{aligned} L' &= -2\sin\frac{t}{2} + 2\cos t \\ &= -2\sin\frac{t}{2} + 2\left(1 - 2\sin^2\frac{t}{2}\right) \\ &= 2\left(1 + \sin\frac{t}{2}\right)\left(1 - 2\sin\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

である。 $0 < t < \pi$ より、 $L(t)$ の符号は $1 - 2\sin\frac{t}{2}$ と等しくなる。よって、増減表は下のようになる。

t	(0)	...	$\frac{\pi}{3}$	...	(π)
$L'(t)$		+	0	-	
$L(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって $L(t)$ は $t = \frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $3\sqrt{3}$ である。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } 3\sqrt{3}$$