

数 学 問 題

はじめに、これを読むこと。

1. この問題用紙は3ページまでである。ただし、ページ番号のない白紙はページ数に含まない。
2. 問題は、1ページから3ページに書かれている。それ以外のページは、計算用紙として使用してよい。
3. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認すること。
4. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
5. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークするか、または記入すること。所定欄以外のところには何も記入しない。
6. 分数形で解答する場合は、それ以上約分できない形で答えなさい。また、根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
7. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
8. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入のこと。
9. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
11. 解答用紙はすべて回収する。持ち帰らず、必ず提出しなさい。ただし、この問題用紙は、必ず持ち帰りなさい。
12. 試験時間は60分である。
13. マーク記入例

良い例	悪い例
	

※ この問題用紙は、必ず持ち帰りなさい。

[I] 次の各問の に入る数値を下の表から選んでアルファベットをマークせよ。同じアルファベットを選んでもかまわない。

1. x, y が正の実数で、

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 \end{cases}$$

を満たすとき、 $x < y$ ならば、 $x = \text{(1)}$, $y = \text{(2)}$ である。

2. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ とするとき、 xy 平面上で関数 $y = f(x)$ は、 $x = a$ のとき極大となり、 $x = b$ のとき極小となるとする。原点 O と 2 点 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ について、 $\cos \angle AOB = \text{(3)}$ であり、三角形 OAB の面積は、 (4) である。

3. xy 平面上で、原点 O を中心とする半径の異なる 2 つの円をそれぞれ C_1, C_2 とし、 C_2 は、 C_1 の内部にあるとする。 C_1 の円周上の異なる 2 点 A, B をとる。線分 AB は、 O を通らずに、 C_2 の円周上で異なる 2 点 P, Q で交わっているとする。 $AB = 6$, $PQ = 4$ とするとき、 $\triangle AOB$ と $\triangle POQ$ の面積の比率は、 $\frac{\triangle AOB}{\triangle POQ} = \text{(5)}$ であり、 C_1 から C_2 をのぞいた領域の面積は、 (6) π である。

A. $-\frac{5}{\sqrt{2}}$

B. -3

C. $-\sqrt{2}$

D. -1

E. $-\frac{2}{\sqrt{5}}$

F. 0

G. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

H. $\frac{1}{2}$

I. 1

J. $\frac{3}{2}$

K. 2

L. $\sqrt{5}$

M. 3

N. 4

O. 5

P. 6

Q. 7

R. 8

S. 9

T. 15

U. 30

V. 45

W. 60

X. 90

Y. 180

Z. 360

〔Ⅱ〕 次のア～シに当てはまる 0～9 の数字を解答欄にマークせよ。

$f(x) = |x^2 - 3|$, $g(x) = |f(x) - 2|$ とする。このとき、つぎの間に答えよ。

1. 関数 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた領域の面積は、 $\boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ である。

2. $g(x) = 0$ ならば、 $x = \pm \boxed{\text{ウ}}$ または $x = \pm \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(ただし、ここで $\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ は、無理数となる数を表している。)

このとき、関数 $y = g(x)$ と x 軸で囲まれた領域の面積は、

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} - \boxed{\text{キ}} \sqrt{\boxed{\text{ク}}} + \frac{\boxed{\text{ケコ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である。

〔Ⅲ〕 m を自然数とし、集合 $A(m)$ を

$$A(m) = \{(i, j, k) \mid i, j, k \text{ は、それぞれ自然数で、} i + j + k = m\}$$

と定める。また、 $A(m)$ の部分集合 $B(m)$ を

$$B(m) = \{(i, j, k) \in A(m) \mid i, j, k \text{ は、互いに異なる自然数}\}$$

と定め、 $A(m)$ 、 $B(m)$ の要素の個数をそれぞれ

$$a_m = n(A(m)), \quad b_m = n(B(m))$$

と置く。このとき、次の間に答えよ。

1. a_5 、 a_6 と b_5 、 b_6 をそれぞれもとめよ。

2. 一般の m について、 $A(m)$ の部分集合 C を

$$C = \{(i, j, k) \in A(m) \mid i = 1\}$$

とする。このとき、 C の要素の個数が、 $n(C) = a_m - a_{m-1}$ となることを示せ。

3. 一般の m について、 a_m を m の式で表せ。

4. m が奇数でかつ 3 の倍数のとき、 $B(m)$ の補集合 $\overline{B(m)}$ の要素の個数と b_m をそれぞれ m の式で表せ。