

数 学 問 題

はじめに、これを読みなさい。

1. この問題用紙は9ページある。ただし、ページ番号のない白紙はページ数に含まない。白紙は計算用紙として使用してよい。
2. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認すること。
3. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
4. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークするか、または記入すること。所定欄以外のところには何も記入しないこと。
5. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
6. 解答は、鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入のこと。
7. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
8. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
9. 問題は〔Ⅰ〕～〔Ⅴ〕まで5問ある。〔Ⅰ〕、〔Ⅱ〕は必ず解答すること。〔Ⅲ〕、〔Ⅳ〕、〔Ⅴ〕はいずれか2問を選択して解答すること。
10. 解答用紙はすべて回収する。持ち帰らず、必ず提出すること。ただし、この問題用紙は、必ず持ち帰ること。
11. 試験時間は70分である。
12. マーク記入例

良い例	悪い例
	

〔Ⅰ〕 (1)～(5)において、Ⓐ, Ⓑ, Ⓒの値の大小関係を調べ、最大のものと最小のものを、それぞれ所定の解答欄(表面)にマークせよ。なお、 i は虚数単位とする。

(1) Ⓐ $\sqrt[3]{3}$ Ⓑ $\sqrt[5]{27}$ Ⓒ $\sqrt[4]{9}$

(2) $\vec{a} = (3, -1)$, $\vec{b} = (-2, 3)$, $\vec{c} = (2, -1)$ である。

Ⓐ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ Ⓑ $\vec{b} \cdot \vec{c}$ Ⓒ $\vec{c} \cdot \vec{a}$

(3) Ⓐ $\left(\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)^2$ Ⓑ $\left(\frac{1}{2} - i\right)\left(\frac{1}{2} + i\right)$ Ⓒ $\frac{i-1}{i} - i$

(4) Ⓐ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ Ⓑ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ Ⓒ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x + 1}$

(5) $y = 2^x$ のグラフを x 軸方向に 3 移動し、さらに直線 $y = x$ に関して対称移動すると、 $y = a \log_b x + c$ に一致する。

Ⓐ a Ⓑ b Ⓒ c

(このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。)

〔Ⅱ〕 所定の解答欄(表面)に、解答をマークせよ。

なお、問題文中の アイ などのア、イ、ウ、…の部分には数字(0～9)が入る。また、アイ などは答が2ケタであることを、オ などは答が1ケタであることを表している。

(1) 正の整数からなる集合 A, B, C, D について、

$$A = \{x \mid x \text{ は } 1 \text{ 以上 } 90 \text{ 以下の整数}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ は } 2 \text{ の倍数}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ は } 5 \text{ の倍数}\}$$

$$D = \{x \mid x \text{ は } 7 \text{ の倍数}\}$$

のとき、 $A \cap (\overline{B \cup C} \cap D)$ に含まれる最大の整数は アイ であり、
 $A \cap (\overline{B \cap C} \cup D)$ に含まれる要素の数は ウエ である。

(2) 循環小数を次のように表す。

$$0.333 \cdots = 0.\dot{3} \quad 0.121212 \cdots = 0.1\ddot{2}$$

0 以上 9 以下の整数 a, b について、

$$0.\ddot{a}b + 0.\ddot{b}a = 0.\dot{9} = 1$$

$$0.\ddot{a}b - 0.\ddot{b}a = 0.\ddot{09}$$

であるとき、 $a =$ オ $, b =$ カ である。

(3) $f(x) = \left(\frac{x}{2} + 2\right)^7$ を微分した $f'(x)$ の x^3 の係数は キク であり、積分

した $\int f(x) dx$ の x^3 の係数は ケコ である。

(このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。)

〔Ⅲ〕, 〔Ⅳ〕, 〔Ⅴ〕のうち2問を選択して解答せよ。(なお3問すべてに解答した場合は, 高得点の2問を合計得点に含める。)

〔Ⅲ〕 所定の解答欄(表面)に, 次の各問の答のみを記せ。

なお, 問題文中に空欄 サ, シ などが2度以上現れる場合, 2度目以降は, サ, シ のように細字で表記している。

次のように定義される数列について, 下の問に答えなさい。

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{①}$$

(1) この数列の第7項の値を記せ。

(2) 一般項を求める過程を記した次の文章の空欄 サ, シ には適切な式を, 空欄 ス ~ チ には適切な値を入れよ。なお, 答が分数となる場合は, 分母を有理化すること。

方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解を α, β ($\alpha \leq \beta$) とすると, 解と係数の関係から,

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1 \quad \text{②}$$

①, ②から,

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n \quad \text{③}$$

が成り立つ。③を変形すると, 次の2つの式が得られる。

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \quad \text{④}$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \quad \text{⑤}$$

④から, 数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は, 初項 $1 - \alpha$, 公比 β の等比数列であることがわかる。よって, この数列の一般項は, α, β, n を用いて次のように表すことができる。

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \text{サ} \quad \text{⑥}$$

⑤から, 数列 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ は, 初項 $1 - \beta$, 公比 α の等比数列であることがわかる。よって, この数列の一般項は, α, β, n を用いて次のように表す

ことができる。

$$a_{n+1} - \beta a_n = \boxed{\text{シ}} \quad (7)$$

⑥, ⑦の辺々を引くと,

$$(\beta - \alpha) a_n = \boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}} \quad (8)$$

ところで, $\alpha, \beta (\alpha \leq \beta)$ は, 定義により方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解だから, この方程式を解くことにより, 値を次のように具体的に求めることができる。

$$\alpha = \boxed{\text{ス}} \quad (9)$$

$$\beta = \boxed{\text{セ}} \quad (10)$$

$\alpha \neq \beta$ だから, ⑧より,

$$a_n = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}} \right) \quad (11)$$

$\frac{1}{\beta - \alpha}$ を⑨, ⑩から求めると,

$$a_n = \boxed{\text{ソ}} \left(\boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}} \right) \quad (12)$$

$\alpha + \beta = 1$ であることから, 求める一般項は,

$$a_n = \boxed{\text{ソ}} \left\{ \left(\frac{\boxed{\text{タ}}}{2} \right)^n - \left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{2} \right)^n \right\}$$

となる。

〔Ⅲ〕, 〔Ⅳ〕, 〔Ⅴ〕のうち2問を選択して解答せよ。(なお3問すべてに解答した場合は、高得点の2問を合計得点に含める。)

〔Ⅳ〕 所定の解答欄(裏面)に、(1)～(5)については答のみを、(6)については解答経過と答をともに記せ。

関数 $f(x)$ が任意の x に対して、 $f(-x)=f(x)$ であるとき、関数 $f(x)$ は偶関数であると言い、 $f(-x)=-f(x)$ であるとき、奇関数であると言う。偶関数の例として、 $f(x)=x^2$, $f(x)=\cos x$ があり、奇関数の例として、 $f(x)=x$, $f(x)=\sin x$ がある。

偶関数と奇関数に関して次の性質が成り立つ。

- 偶関数と偶関数の積(商)は偶関数。なぜなら、 $f(x)$ と $g(x)$ がともに偶関数であるとき、 $f(-x) \cdot g(-x)=f(x) \cdot g(x)$ だからである。
- 奇関数と奇関数の積(商)は 。
- 偶関数と奇関数の積(商)は 。
- 偶関数と偶関数の和(差)は偶関数。
- 奇関数と奇関数の和(差)は 。
- 偶関数と奇関数の和(差)は 。

- (1) 空欄 ～ のそれぞれについて、偶関数のときはEを、奇関数のときはOを、どちらでもないときはNを、解答欄に記せ。
- (2) 偶関数の具体例を2つ解答欄に記せ。ただし、上の例に挙げたものを除く。
- (3) 奇関数の具体例を2つ解答欄に記せ。ただし、上の例に挙げたものを除く。
- (4) 任意の関数 $h(x)$ は、

$$h(x) = \frac{1}{2} \{h(x) + h(-x)\} + \frac{1}{2} \text{ }$$

と表すことができる。明らかに、 $\frac{1}{2} \{h(x) + h(-x)\}$ は偶関数であり、 $\frac{1}{2} \text{ }$ は奇関数であるから、任意の関数は偶関数と奇関数の和で表すことができる。空欄 に当てはまる適切な式を解答欄に記せ。

- (5) 関数 $\frac{1}{x+1}$ (ただし $x \neq \pm 1$) を偶関数と奇関数の和で表し、解答欄に記せ。

- (6) $f(x)$ が偶関数であるとき、定積分

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad (a > 0)$$

であり、 $f(x)$ が奇関数であるとき、定積分

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad (a > 0)$$

である。この性質を使って、次の定積分の値を求めよ。

$$\int_{-2}^2 3x^2(\sin x + \cos x)^2 dx$$

〔Ⅲ〕, 〔Ⅳ〕, 〔Ⅴ〕のうち2問を選択して解答せよ。(なお3問すべてに解答した場合は, 高得点の2問を合計得点に含める。)

〔Ⅴ〕 所定の解答欄(裏面)に, (1)については答のみを, (2), (3)については解答経過と答をともに記せ。

m を実数とし, 円 $x^2 + y^2 + 2mx - 2my + m^2 = 0$ と直線 $y = x - m + 7$ が異なる2点で交わる時, この2つの交点を P, Q とする。また, 交点 P, Q の x 座標を α, β とする。

- (1) 線分 PQ の長さは, $|\alpha - \beta|$ の定数倍になる。その定数を記せ。
- (2) $\alpha + \beta, \alpha\beta$ を m を用いた式で表せ。
- (3) 線分 PQ の長さの最大値と, その時の m の値を求めよ。

(以上問題終)