

国語，数学Ⅲ・数学C 問題

はじめに、これを読みなさい。

1. 解答用紙には、あなたの受験番号が印刷されています。受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認し、氏名を記入しなさい。
2. 「国語」の問題は裏面から始まります。
3. この問題冊子は、「数学Ⅲ・数学C」については表面から10ページ、「国語」については裏面から18ページあります(表紙の次の白紙2ページはメモ用紙として使用してかまいません)。必要な科目を選択して解答しなさい。
4. 解答用紙の「解答科目マーク欄」にマークし、「解答科目名記入欄」に解答する科目名を記入しなさい。マークされていない場合、又は複数の科目にマークされている場合は、この時限は採点対象外となります。
5. 解答は、すべて解答用紙の解答欄にマークしなさい。
6. 1つの解答欄に2つ以上マークしてはいけません。
7. 解答は、必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
8. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないようにしなさい。
9. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしてはいけません。
10. 解答用紙は持ち帰らないで、必ず提出しなさい。
11. この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
12. 試験時間は60分です。
13. (数学Ⅲ・数学C) 分数形で解答する場合は、既約分数で答えなさい。
14. (数学Ⅲ・数学C) 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
15. マーク記入例

良い例	悪い例
	

(このページは計算用紙として使用してよい)

(このページは計算用紙として使用してよい)

数学Ⅲ・数学C 問題

〔Ⅰ〕 次の空欄に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

- (1) 大小 2 つのサイコロを振って出た目がそれぞれ m, n のとき, 行列 $A(m, n)$ を

$$A(m, n) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} \begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}.$$

と定める。 $A(m, n)$ は原点を中心とする回転移動を表す行列である。この回転移動の回転角を $\theta(m, n)$ とする。ただし, $0 < \theta(m, n) < \frac{\pi}{2}$ とする。このとき, $A(m, n)$ と $A(n, m)$ の積は

$$A(m, n)A(n, m) = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & -\boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$$

である。すべての目の出方に対する $\theta(m, n)$ の和は $\boxed{\text{オ}}$ π である。

(このページは計算用紙として使用してよい)

(2) 関数 $f(x)$ を $f(x) = e^{-x} \sin \sqrt{3}x$ ($x \geq 0$) と定義する。

$f(x)$ が極大値をとる x の値を小さい方から順に $x_1, x_2, x_3, \dots$ とおくと、
 n 番目は

$$x_n = \frac{\sqrt{\frac{\text{カ}}{\text{キ}}}}{\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}} \pi + \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \sqrt{\frac{\text{カ}}{\text{キ}}} (n-1)\pi$$

であり、

$$f(x_n) = \frac{\sqrt{\frac{\text{コ}}{\text{サ}}}}{\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}} e^{-x_n}$$

となる。

このとき、第 n 項が $f(x_n)$ である無限級数の和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = \frac{\sqrt{\frac{\text{コ}}{\text{サ}}}}{\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}} \frac{e^a}{e^b - 1}$$

となる。ここで

$$a = \frac{\frac{\text{シ}}{\text{ス}}}{\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}} \sqrt{\frac{\text{カ}}{\text{キ}}} \pi, \quad b = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \sqrt{\frac{\text{カ}}{\text{キ}}} \pi$$

である。

(このページは計算用紙として使用してよい)

〔Ⅱ〕 次の空欄に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

3 つの曲線

$$C_1: y = \cos \frac{x}{2}, \quad C_2: y = \tan x, \quad C_3: y = \sin x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right)$$

によって囲まれた部分の面積 S を求めたい。

まず, $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ の範囲において $\tan x - \sin x \geq 0$ であり, $\tan x = \sin x$ となるのは $x =$ ア のときのみであることに注意しよう。

曲線 C_1 と C_2 の交点の x 座標を α とおくと,

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\text{ イ }} - \text{ ウ }$$

である。よって,

$$\cos \alpha = \sqrt{\text{ エ }} - \text{ オ }$$

となる。

また, 曲線 C_1 と C_3 の交点の x 座標は $\frac{\text{ カ }}{\text{ キ }} \pi$ である。

以上より

$$S = \frac{\text{ ク }}{\text{ ケ }} - \sqrt{\text{ コ }} - \log \left(\sqrt{\text{ サ }} - \text{ シ } \right)$$

を得る。ただし, $\log$ は自然対数を表す。

(このページは計算用紙として使用してよい)

- 〔Ⅲ〕 次の空欄ア、エ、ク、ケ、サ、シに当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の記号をマークせよ。それ以外の空欄には、当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし、解答群から同じものを二回以上選んでもよい。

なお、 $\log$ は自然対数を表す。

- (1) 不定積分 $\int \sqrt{x^2 + 1} \, dx$ を求めたい。 $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくと $e^t =$ ア である。この置換により不定積分を求めると

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx &= \frac{\text{イ}}{\text{ウ}} \int \left(\text{エ} + \text{オ} \right) dt \\ &= \frac{\text{カ}}{\text{キ}} \left\{ \text{ク} + \log \left(\text{ケ} \right) \right\} + C \end{aligned}$$

である。ただし、 C は積分定数とする。

- (2) 座標平面上の 2 点 $(1, 0)$ と $(-1, 0)$ からの距離の積が 2 である点の軌跡を L とする。点 (x, y) が L 上にあるための条件は

$$y^2 = \text{コ} \text{サ} - \left(\text{シ} \right)$$

である。 $y^2 \geq 0$ より x のとり得る値の範囲は

$$-\sqrt{\text{ス}} \leq x \leq \sqrt{\text{ス}}$$

である。

- (3) 座標空間内の 2 点 $(1, 0, 0)$ と $(-1, 0, 0)$ からの距離の積が 2 以下である点からなる部分を X とする。立体 X の体積を V とすると

$$V = \text{セ} \pi \log \left(\text{ソ} + \sqrt{\text{タ}} \right)$$

である。

ア, エ, ク, ケ, サ, シの解答群

⑥ $\sqrt{x^2 + 1}$

① $x\sqrt{x^2 + 1}$

② $\sqrt{x^2 + 1} + x$

③ $x - \sqrt{x^2 + 1}$

④ $\sqrt{x^2 + 1} - x$

⑤ $x^2 + 1$

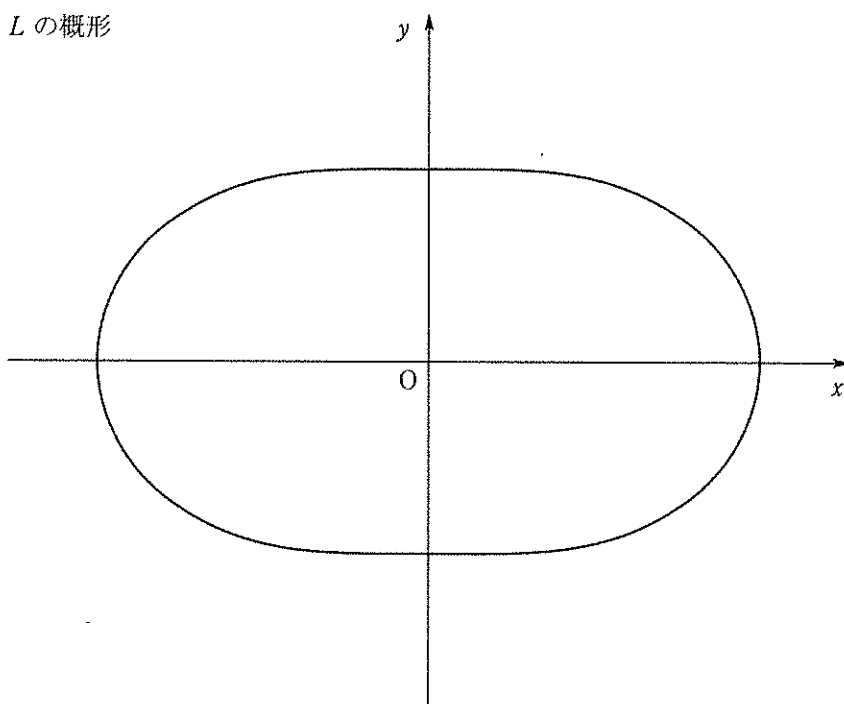
⑥ $e^t + e^{-t}$

⑦ $e^t - e^{-t}$

⑧ $e^{2t} + e^{-2t}$

⑨ $e^{2t} - e^{-2t}$

L の概形



〔Ⅳ〕 次の空欄キ、ケ、サ、ス、セ、ソ、タに当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。それ以外の空欄には、当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の記号をマークせよ。

- (1) 関数 $g(x)$ は $x \geq 0$ で連続であるとし、 $t \geq 0$ において $G(t) = \int_0^t g(x) dx$ とおき、さらに $h(t) = t^2 G(t^3)$ とおく。このとき

$$h'(t) = \boxed{\text{ア}} \int_0^{t^3} g(x) dx + \boxed{\text{イ}} g(\boxed{\text{ウ}})$$

である。

- (2) 実数 t は $0 < t < 1$ を満たすとする。2 つの楕円

$$C_1: x^2 + \frac{y^2}{t^2} = 1, \quad C_2: \frac{x^2}{t^2} + y^2 = 1$$

を考える。 C_1 の内部に含まれて C_2 の内部に含まれない部分の面積を $f(t)$ とおく。 $0 < t < 1$ における $f(t)$ の最大値について考察したい。

C_1 と C_2 の第 1 象限における交点の x 座標を $c(t)$ とすると、

$$c(t) = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \text{ である。} C_1 \text{ の内部の面積は } \boxed{\text{カ}} \text{ であることから、}$$

$$\boxed{\text{カ}} \text{ から 2 つの楕円の内部の共通部分の面積を引くことにより}$$

$$f(t) = \boxed{\text{カ}} - \left(\boxed{\text{キ}} \int_0^{c(t)} \boxed{\text{ク}} dx - \boxed{\text{ケ}} \boxed{\text{コ}} \right)$$

となる。これより $f'(t)$, $f''(t)$ を順次計算すると $f''(t) = -\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ となる。

したがって、 $f'(t)$ は $0 < t < 1$ において減少する連続関数であり、

$$\lim_{t \rightarrow +0} f'(t) = \boxed{\text{ス}} \pi, \quad \lim_{t \rightarrow 1-0} f'(t) = -\boxed{\text{セ}}$$

であるから、 $f'(t) = 0$ である t がただ一つ存在する。その t を t_0 とおくと、原点を中心とする半径 1 の円の $x, y \geq 0$ の部分と x 軸および直線 $x = c(t_0)$ によって囲まれる部分の面積は $\frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ であり、 $f(t)$ の最大値は

$$f(t_0) = \boxed{\text{タ}} \boxed{\text{チ}} \text{ である。}$$

ア, イ, ウの解答群

① t

① $2t$

② t^2

③ $2t^2$

④ $3t^2$

⑤ t^3

⑥ $2t^3$

⑦ $3t^3$

⑧ $2t^4$

⑨ $3t^4$

エ, オ, カ, シの解答群

① πt

① πt^2

② $\sqrt{t}$

③ t

④ $t^{\frac{3}{2}}$

⑤ t^2

⑥ $\sqrt{t^2 + 1}$

⑦ $t^2 + 1$

⑧ $(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$

⑨ $(t^2 + 1)^2$

ク, コ, チの解答群

① $\sqrt{1 - x^2}$

① $t\sqrt{1 - x^2}$

② $\sqrt{t^2 - x^2}$

③ $c(t)$

④ $c(t)^2$

⑤ t_0

⑥ t_0^2

⑦ $c(t_0)$

⑧ $c(t_0)^2$

⑨ $t_0 c(t_0)$

