

数 学 問 題

注意事項

1. この問題冊子は14ページあります。解答用紙には、おもてと裏があります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕,〔Ⅲ〕の解答は、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕,〔Ⅴ〕は、解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
7. 1問につき2つ以上マークしないこと。2つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
9. 訂正するとき、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また、所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は持ち帰らないで、必ず提出しなさい。
12. この問題冊子は必ず持ち帰ること。
13. 試験時間は120分です。
14. マークシート記入例

良い例	悪い例
	

[I] 次の空欄 から に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし は 2 桁の数である。また e は自然対数の底である。

(1) $f(x) = \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ とする。 $f'(x)$ と $f''(x)$ を $f(x)$ を用いて表すと、

それぞれ

$$f'(x) = \text{ } \cdot \{f(x)\}^2 - \text{ } \cdot f(x),$$

$$f''(x) = \text{ } \cdot \{f(x)\}^3 - \text{ } \cdot \{f(x)\}^2 + \text{ } \cdot f(x)$$

となる。

(このページは計算用紙として使用してよい)

- (2) $-1 < x < 1$, $0 < y$ とする。3点 $A(1, 0)$, $B(x, y)$, $C(-1, 0)$ を頂点とする鋭角三角形 ABC において、辺 AB 上の点を D , 辺 BC 上の点を E , 線分 AE と CD との交点を P とする。

- (a) $BE : EC = 1 : 1$ かつ $AD : DB = 2 : 1$ のとき,

$$\vec{AP} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \vec{AB} + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \vec{AC} \text{ が成り立つ。}$$

- (b) $BE : EC = 1 : 1$ のとき, $\angle AEB = 90^\circ$ となるような点 B の軌跡は中心

($\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$), 半径 $\boxed{\text{ス}}$ の円の一部である。

- (c) (b) において, さらに $\angle CDA = 90^\circ$ とする。点 P の y 座標が最大値をとる

とき, P の x 座標の値は $\boxed{\text{セ}} - \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(このページは計算用紙として使用してよい)

〔Ⅱ〕 次の空欄 から に当てはまる数を解答用紙の所定の欄に記

入せよ。ただし $\log$ は自然対数である。

(1) $\theta = \frac{2\pi}{7}$ とする。単位円上の点 $P_n(\cos n\theta, \sin n\theta) (n = 0, 1, 2, \dots, 6)$

は正7角形の頂点をなすので

$$\sum_{n=0}^6 \cos n\theta = \text{ }$$

である。さらに $\theta + 6\theta, 2\theta + 5\theta, 3\theta + 4\theta$ が 2π であるから

$$\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = \text{ }$$

であり、よって

$$\cos \theta + \cos 2^2\theta + \cos 3^2\theta = \text{ }$$

である。これから

$$\sum_{n=1}^{300} \cos n^2\theta = \text{ }$$

である。

(このページは計算用紙として使用してよい)

(2)

(a) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} = \boxed{\text{お}}$

(b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} d\theta = \log \left(\boxed{\text{か}} \right)$

(このページは計算用紙として使用してよい)

〔Ⅲ〕 次の空欄 から に当てはまるもの(数・式など)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

A と B の二人が繰り返しゲームを行う。各ゲームにおいて、A が勝つ確率を p 、B が勝つ確率を $1 - p$ とする。ただし $0 < p < 1$ である。

k を自然数とする。先に k 勝した方を優勝とし、どちらかが優勝するまでゲームを続けて行う。

$k \leq n \leq 2k - 1$ をみたす自然数 n に対し、 n 回目のゲームで A の優勝が決まる確率を $P(n)$ とする。

(1) $P(n)$ を p 、 k 、 n を用いて表すと である。

(2) $\frac{P(n+1)}{P(n)}$ を p 、 k 、 n を用いて表すと である。ただし

$k \leq n \leq 2k - 2$ とする。

(3) $k = 20$ 、 $p = 0.6$ のとき $P(n)$ を最大にする n は である。

(このページは計算用紙として使用してよい)

〔Ⅳ〕 n を 3 以上の自然数とする。1 から n までの自然数が一つずつ書かれた n 枚のカードがある。異なるカードには異なる数が書かれているとする。これらを円周上にすべて並べる。このときどのような順番で並べたとしても、以下のことが成り立つことを示せ：

(*) 隣接する 3 枚のカードの数の和の最大値は $\frac{3}{2}(n+1)$ 以上である。

(このページは計算用紙として使用してよい)

[V] 半径1の円に内接する $\triangle ABC$ を考える。 $\angle B = x$, $\angle C = t$ とし, $\triangle ABC$ の3辺の長さの和を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) ℓ を t, x を用いて表せ。
- (2) 点A, Bを固定して点Cを動かすとき, ℓ の最大値 $L(t)$ を t で表せ。
- (3) t が $0 < t < \pi$ の範囲を動くとき, (2)で求めた $L(t)$ の最大値を求めよ。

(このページは計算用紙として使用してよい)

