

【I】

【解答】

(1)	ア	G	イ	J					
(2)	ア	G	イ	H	ウ	F			
(3)	ア	B	イ	D	ウ	E	エ	H	オ D
	カ	C	キ	D	ク	I	ケ	A	
(4)	ア	B	イ	I	ウ	D			
(5)	ア	A	イ	B	ウ	C			
(6)	ア	D	イ	D	ウ	E	エ	H	オ G
	カ	I	キ	C	ク	B			

【解説】

(1) 白玉が5回中どこで4回取り出されるかで ${}_5\mathrm{C}_4$ 通りあるため、このときの確率は、

$${}_5\mathrm{C}_4\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{4}{6}\right)=5\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\frac{10}{243}$$

である。

(2)

$$\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{7}=k$$

とおく。ただし、 k は0ではない実数である。上式より、

$$\begin{cases} x+y=3k \\ y+z=6k \\ z+x=7k \end{cases}$$

$$\therefore x=2k, y=k, z=5k$$

を得る。よって、

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\frac{(2k)^3+k^3+(5k)^3}{2k\cdot k\cdot 5k}$$

$$=\frac{8+1+125}{10}$$

$$=\frac{67}{5}$$

となる。

(3)

与式は、

$$y=2\sin^2\theta+3\cos\theta+\frac{1}{8}$$

$$=2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta+\frac{1}{8}$$

$$=-2\cos^2\theta+3\cos\theta+\frac{17}{8}$$

と変形できる。 $\cos\theta=t$ とおくと、 $0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$ より、 $-1\leq t\leq1$ であり、上式は、

$$y=-2t^2+3t+\frac{17}{8}$$

$$=-2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{13}{4}$$

となる。よって、 $-1\leq t\leq1$ より、関数 y は $t=\frac{3}{4}$ のとき、最大値 $\frac{13}{4}$ をとり、このとき、

$$t=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{3}{4}$$

である。 $0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$ より、

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

となるため、

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

である。また、 $-1\leq t\leq1$ より、関数 y は $t=-1$ のとき、最小値 $-\frac{23}{8}$ をとり、このとき、

$$t=-1$$

$$\Leftrightarrow\cos\theta=-1$$

$$\therefore\theta=180^\circ\ (0^\circ\leq\theta\leq180^\circ)$$

である。よって、

$$\tan\theta=0$$

である。

(4)

与式は、

$$f(x)=(\log_22x)^2+\log_2(2x)^3+\log_2x+2$$

$$=(\log_2x+1)^2+3(\log_2x+1)+\log_2x+2$$

$$=(\log_2x)^2+6\log_2x+6$$

と変形できる。 $u=\log_2x$ とおくと、 u は全ての実数値を取り、上式は、

$$f(x)=u^2+6u+6$$

$$=(u+3)^2-3$$

となり、 $u=-3$ のとき、最小値 -3 をとる。このとき、

$$u=-3$$

$$\Leftrightarrow\log_2x=-3$$

$$\therefore x=\frac{1}{8}$$

となる。

(5)

$$Z_k=\frac{X_k-A}{\sum_{k=1}^{30}(X_k-A)^2}$$

について、分母の $\sum_{k=1}^{30}(X_k-A)^2$ は定数であるため、 $B=\sum_{k=1}^{30}(X_k-A)^2$ とおく。このとき、

$$\sum_{k=1}^{30}Z_k=\frac{1}{B}\cdot\sum_{k=1}^{30}(X_k-A)$$

$$=\frac{1}{B}\cdot\left(\sum_{k=1}^{30}X_k-A\sum_{k=1}^{30}1\right)$$

$$=\frac{1}{B}\cdot\left(\sum_{k=1}^{30}X_k-\frac{\sum_{k=1}^{30}X_k}{30}\cdot30\right)\left(\because A=\frac{\sum_{k=1}^{30}X_k}{30}\right)$$

$$=0$$

となる。また、

$$\sum_{k=1}^{30}Z_kX_k=\frac{\sum_{k=1}^{30}(X_k-A)X_k}{\sum_{k=1}^{30}(X_k-A)^2}$$

について、分子と分母に分けて考えていく。まず、分子の $\sum_{k=1}^{30}(X_k-A)X_k$ を変形して、

$$\sum_{k=1}^{30}(X_k-A)X_k=\sum_{k=1}^{30}(X_k^2-AX_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{30}X_k^2-A\sum_{k=1}^{30}X_k$$

$$=\sum_{k=1}^{30}X_k^2-\frac{\sum_{k=1}^{30}X_k}{30}\cdot\sum_{k=1}^{30}X_k$$

$$=\sum_{k=1}^{30}X_k^2-\frac{1}{30}\left(\sum_{k=1}^{30}X_k\right)^2$$

を得る。また、分母の $\sum_{k=1}^{30}(X_k-A)^2$ を変形して、

$$\sum_{k=1}^{30}(X_k-A)^2=\sum_{k=1}^{30}(X_k^2-2AX_k+A^2)$$

$$=\sum_{k=1}^{30}X_k^2-2A\sum_{k=1}^{30}X_k+A^2\sum_{k=1}^{30}1$$

$$=\sum_{k=1}^{30}X_k^2-2\cdot\frac{\sum_{k=1}^{30}X_k}{30}\cdot\sum_{k=1}^{30}X_k+\left(\frac{\sum_{k=1}^{30}X_k}{30}\right)^2\cdot30$$

$$=\sum_{k=1}^{30}X_k^2-\frac{1}{30}\left(\sum_{k=1}^{30}X_k\right)^2$$

を得る。以上より、分母と分子が同じであるため、

$$\sum_{k=1}^{30}Z_kX_k=1$$

である。よって、

$$\sum_{k=1}^{30}Z_kY_k=\sum_{k=1}^{30}Z_k(50+2X_k)$$

$$=50\sum_{k=1}^{30}Z_k+2\sum_{k=1}^{30}Z_kX_k$$

$$=2$$

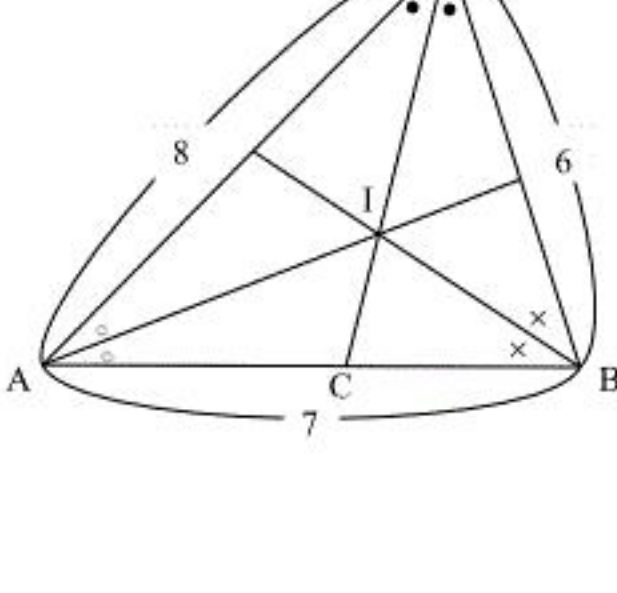
となる。

(6)

点Gは△OABの重心であるため、

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$$

となる。



上図より、点O、I、Cは一直線上に存在する。角の二等分線の定理より、

$$\mathrm{AC:CB=OA:OB}$$

$$=8:6$$

$$=4:3$$

であり、

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3\vec{a}+4\vec{b}}{7}$$

となる。また、△OBCについて、同様に角の二等分線の定理より、

$$\mathrm{OI:IC=OB:CB}$$

$$=6:3$$

$$=2:1$$

となるため、

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3\vec{a}+4\vec{b}}{7}$$

$$=\frac{6\vec{a}+8\vec{b}}{21}$$

である。以上より、

$$\overrightarrow{\mathrm{GI}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

$$=\frac{6\vec{a}+8\vec{b}}{21}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$=\frac{-\vec{a}+\vec{b}}{21}$$

$$=-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{21}$$

となり、GIとABが平行であることが証明された。

〔Ⅱ〕

※大学側から、〔Ⅱ〕の設問において、上から4行目の後ろに「ただし、 $=\sqrt{\quad}$ の場合を除く。」との条件が必要であったところ、記載していなかった、という問題の条件に不足があったため、〔Ⅱ〕のすべての設問について全員を正解とする対応措置を取ったとの公表があった。そのため、〔Ⅱ〕の解答解説はありません。

【Ⅲ】

〔解答〕

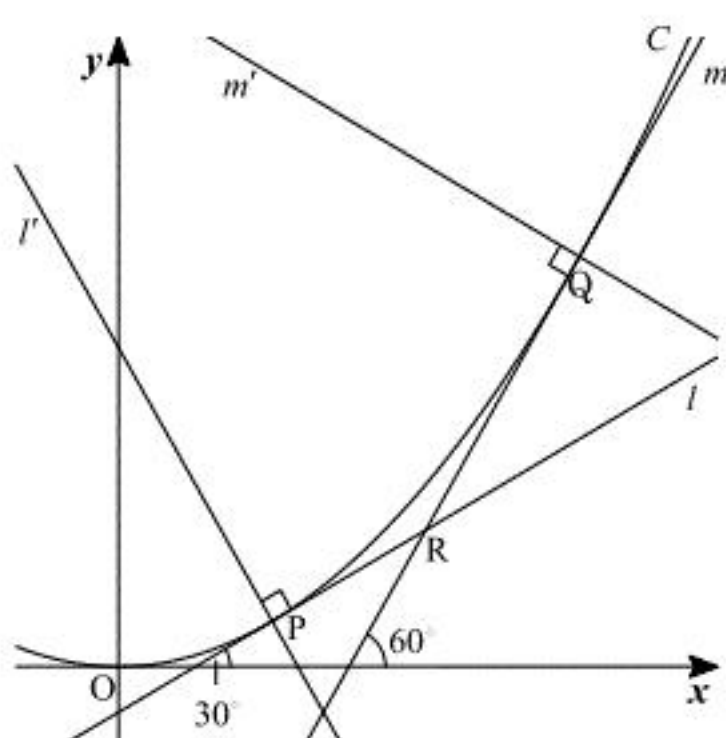
$$(1) \quad P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{6}\right) \quad Q\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$$

$$(2) \quad R\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(3) \quad l': y = -\sqrt{3}x + \frac{7}{6} \quad m': y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{2}$$

$$(4) \quad S\left(0, \frac{11}{6}\right)$$

〔解説〕



(1)

放物線 C について、

$$y' = x$$

となるため、接線 l, m の傾きは p, q である。題意より、

$$\begin{aligned} p &= \tan 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ q &= \tan 60^\circ \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。よって、点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{6}\right)$ 、点 $Q\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ である。

(2)

直線 l は点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{6}\right)$ を通り、傾き $\frac{\sqrt{3}}{3}$ より、

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ \therefore y &= \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{6} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、直線 m は点 $Q\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ を通り、傾き $\sqrt{3}$ より、

$$\begin{aligned} y - \frac{3}{2} &= \sqrt{3} \left(x - \sqrt{3} \right) \\ \therefore y &= \sqrt{3}x - \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。よって、①、②より、2 直線の交点 R の座標は、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{6} &= \sqrt{3}x - \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x - 1 &= 6\sqrt{3}x - 9 \\ \therefore x &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \therefore y &= \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

より、 $R\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}\right)$ となる。

(3)

直線 l', m' はそれぞれ直線 l, m に直交するため、傾きは $-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$ である。よって、直線 l' は

点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{6}\right)$ を通り、傾き $-\sqrt{3}$ より、

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{6} &= -\sqrt{3} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ \therefore y &= -\sqrt{3}x + \frac{7}{6} \end{aligned}$$

であり、直線 m' は点 $Q\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ を通り、傾き $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ より、

$$\begin{aligned} y - \frac{3}{2} &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \sqrt{3} \right) \\ \therefore y &= -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

である。

(4)

(3)でもとめた直線 l', m' の交点を R' とおくと、

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + \frac{7}{6} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{2} \end{cases} \quad \therefore x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, y = \frac{19}{6}$$

より、 $R'\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{19}{6}\right)$ となる。ここで、 $\angle RPR' = \angle RQR' = 90^\circ$ より、四角形 $PRQR'$ は直径を

RR' とする円に内接し、これが $\triangle PRQ$ の外接円である。したがって、点 S は線分 RR' の中点に等しく、

$$S\left(\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} + \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}{2}, \frac{\frac{1}{2} + \frac{19}{6}}{2}\right) = S\left(0, \frac{11}{6}\right)$$

となる。