

〔 I 〕

〔解答〕

- (1) ア 5 イ 1 ウ 5 エ 3 オ 1 カ 9
 (2) キ 2 ク 2 ケ 2 コ 5
 (3) サ 5 シ 5 ス 4 セ 9 ソ 3 タ 5

〔解説〕

- (1) ab が 3 の倍数とならない場合は、 a, b のいずれも 3, 6, 9 以外の数字となる場合である。このときの確率は、

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{49}{100}$$

であるから、 ab が 3 の倍数となる確率は、

$$1 - \frac{49}{100} = \frac{51}{100}$$

である。与えられた不等式 $ab + 8 \geq 3(a + b)$ を変形すると、

$$\begin{aligned} ab + 8 &\geq 3(a + b) \\ \Leftrightarrow 3a - ab + 3b &\leq 8 \\ \Leftrightarrow a(3 - b) + 3b &\leq 8 \\ \Leftrightarrow a(3 - b) - 3(3 - b) &\leq -1 \\ \Leftrightarrow (a - 3)(3 - b) &\leq -1 \\ \Leftrightarrow (a - 3)(b - 3) &\geq 1 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。 $a - 3, b - 3$ は整数であるから、 $\textcircled{1}$ を満たす必要十分条件は $a - 3, b - 3$ がともに正またはともに負となるときである。 $a - 3, b - 3$ がともに正となるときは、 a, b がともに 4 以上となるときであるから、

$$7 \cdot 7 = 49$$

通りである。 $a - 3, b - 3$ がともに負となるときは、 a, b がともに 2 以下となるときであるから、

$$2 \cdot 2 = 4$$

通りである。 a, b の数字の選び方は 100 通りであるから、 $ab + 8 \geq 3(a + b)$ となる確率は、

$$\frac{49 + 4}{100} = \frac{53}{100}$$

である。与えられた不等式 $1 \leq \log_{a+1} b \leq 2$ を変形すると、

$$\begin{aligned} 1 &\leq \log_{a+1} b \leq 2 \\ \Leftrightarrow a + 1 &\leq b \leq (a + 1)^2 \end{aligned}$$

となる。 $a + 1, b$ は整数であるから $a + 1 \leq b \Leftrightarrow a < b$ である。したがって、 $a < b$ を満たし

$$b \leq (a + 1)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす条件を考える。

$$4^2 = 16 > 10$$

より、 $a + 1 \geq 4 \Leftrightarrow a \geq 3$ のとき、 b が 1 から 10 までのいかなる値を取っても $\textcircled{2}$ が成り立つ。

$a = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} (a + 1)^2 &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

であるから、 $a < b$ を満たし $\textcircled{2}$ を満たす (a, b) は、

$$(a, b) = (1, 2), (1, 3), (1, 4)$$

の 3 組である。 $a = 2$ のとき、

$$\begin{aligned} (a + 1)^2 &= 3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

であるから、 $a < b$ を満たし $\textcircled{2}$ を満たす (a, b) は、

$$(a, b) = (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (2, 9)$$

の 7 組である。 $a \geq 3$ のときは常に $\textcircled{2}$ を満たすため、 $a < b$ を満たす (a, b) は、

$$(a, b) = (a, a + 1), (a, a + 2), \dots, (a, 10)$$

の $10 - a$ 組である。したがって不等式 $a + 1 \leq b \leq (a + 1)^2$ を満たす (a, b) は

$$\begin{aligned} 3 + 7 + \sum_{a=3}^{10} (10 - a) &= 3 + 7 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 \\ &= 38 \end{aligned}$$

組であるから、 $1 \leq \log_{a+1} b \leq 2$ となる確率は

$$\frac{38}{100} = \frac{19}{50}$$

である。

- (2)

$t = \sin \theta$ とすると、 t の取る範囲は $-1 \leq t \leq 1$ である。与えられた方程式を変形すると、

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + 3a \sin \theta &= b \\ \Leftrightarrow (1 - \sin^2 \theta) + 3a \sin \theta &= b \\ \Leftrightarrow \sin^2 \theta - 3a \sin \theta + b - 1 &= 0 \end{aligned}$$

となるため、

$$t^2 - 3at + b - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲に解を持つ確率が求める確率である。 $f(t) = t^2 - 3at + b - 1$ として $\textcircled{3}$ の判

別式を D とする。放物線 $y = f(t)$ の軸は $t = \frac{3}{2}a$ であり、また $a \geq 1$ であるから、この軸の t 座標は

$$\frac{3}{2}a > 1$$

となるので、 $f(t)$ は $t \leq 1$ で単調減少である。よって $\textcircled{3}$ が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲に解を持つ条件は、

$$\begin{aligned} f(-1) &\geq 0 \text{ かつ } f(1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow -3a &\leq b \leq 3a \\ \Leftrightarrow b &\leq 3a \quad (\because a > 0, b > 0) \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

であり、これを満たす確率が求める確率である。

$$3 \cdot 4 = 12 > 10$$

より、 $a \geq 4$ のときは b が 1 から 10 までのいかなる値を取っても $\textcircled{4}$ が成り立つ。 $a \leq 3$ のとき、

$\textcircled{4}$ を満たす (a, b) は、

$$(a, b) = (a, 1), (a, 2), \dots, (a, 3a) \textcircled{4}$$

の $3a$ 組である。したがって、 $\textcircled{4}$ を満たす (a, b) は、

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^3 3a + \sum_{a=4}^{10} 10 &= 3 + 6 + 9 + 7 \cdot 10 \\ &= 88 \end{aligned}$$

組であり、求める確率は、

$$\frac{88}{100} = \frac{22}{25}$$

である。

- (3)

a, b は互いの選び方に影響されない。 $a(b - 6)(b + 6)$ の期待値を $E\{a(b - 6)(b + 6)\}$ とすると、

$$\begin{aligned} E\{a(b - 6)(b + 6)\} &= E(a)E\{(b - 6)(b + 6)\} \\ &= \left(\sum_{a=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot a \right) \left\{ \sum_{b=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot (b - 6)(b + 6) \right\} \\ &= \left(\frac{1}{10} \sum_{a=1}^{10} a \right) \left\{ \frac{1}{10} \sum_{b=1}^{10} (b^2 - 36) \right\} \\ &= \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 \right) \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 - \frac{1}{10} \cdot 10 \cdot 36 \right) \\ &= \frac{11}{2} \cdot \frac{5}{2} \\ &= \frac{55}{4} \end{aligned}$$

と求まる。また、

$$\begin{aligned} E\left\{ \frac{2^a}{b(b+1)} \right\} &= E(2^a)E\left\{ \frac{1}{b(b+1)} \right\} \\ &= \left(\sum_{a=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot 2^a \right) \left(\sum_{b=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{b(b+1)} \right) \\ &= \frac{1}{100} \cdot 2 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} \cdot \sum_{b=1}^{10} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+1} \right) \\ &= \frac{2046}{100} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\ &= \frac{2046}{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{11} \right) \\ &= \frac{2046}{100} \cdot \frac{10}{11} \\ &= \frac{93}{5} \end{aligned}$$

と変形できる。

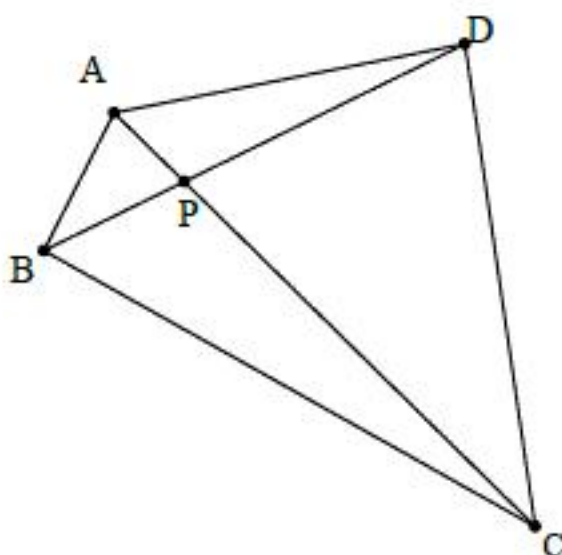
〔Ⅱ〕

〔解答〕

- (1) チ 5 ツ 2 テ 2 ト 9
 (2) ナ 1 ニ 0 ヌ 3
 (3) ネ 5 ノ 4 ハ 3

〔解説〕

(1)



三角形 PAB, PBC の面積の比は 1:5 であるから、 $PA:PC=1:5$ である。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PC} &= -5\overrightarrow{PA} \\ &= -5\vec{a}\end{aligned}$$

となる。三角形 PAB, PAD の面積の比は 1:2 であるから、 $PB:PD=1:2$ である。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PD} &= -2\overrightarrow{PB} \\ &= -2\vec{b}\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PC} \\ &= -2\vec{b} + 5\vec{a} \\ &= 5\vec{a} - 2\vec{b}\end{aligned}$$

と求まる。 $|\overrightarrow{AB}|^2=1$, $|\overrightarrow{BC}|^2=25$, $|\overrightarrow{AD}|^2=4$ であるから、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 1 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BC}|^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow |-5\vec{a} - \vec{b}|^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow 25|\vec{a}|^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 25 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AD}|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow |-2\vec{b} - \vec{a}|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 &= 4 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。①, ②, ③より、

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2 &= \frac{8}{9} \Leftrightarrow |\vec{a}| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ |\vec{b}|^2 &= \frac{5}{9} \Leftrightarrow |\vec{b}| = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{2}{9}\end{aligned}$$

と求まる。

(2)

三角形 PCD の面積を S とすると、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PC}|^2 |\overrightarrow{PD}|^2 - (\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|-5\vec{a}|^2 |-2\vec{b}|^2 - \{(-5\vec{a}) \cdot (-2\vec{b})\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{25|\vec{a}|^2 \cdot 4|\vec{b}|^2 - \{10\vec{a} \cdot \vec{b}\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{25 \cdot \frac{8}{9} \cdot 4 \cdot \frac{5}{9} - \left\{10 \cdot \frac{2}{9}\right\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3600}{81}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{60}{9} \\ &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

となる。

(3)

点 R は直線 AD 上にあるから、 k を実数とすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{AD} \\ &= \vec{a} + k(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PA}) \\ &= \vec{a} + k(-2\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (1-k)\vec{a} - 2k\vec{b}\end{aligned}$$

が成り立つ。同様に、 t を実数とすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{PB} + t\overrightarrow{BC} \\ &= \vec{b} + t(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}) \\ &= \vec{b} + t(-5\vec{a} - \vec{b}) \\ &= -5t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\end{aligned}$$

が成り立つ。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから係数を比較して、

$$\begin{cases} 1-k = -5t \\ -2k = 1-t \end{cases}$$

となる。これを計算すると、

$$k = -\frac{2}{3}, t = -\frac{1}{3}$$

と求まる。以上より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} &= \frac{5}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} \\ &= \frac{5\vec{a} + 4\vec{b}}{3}\end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1) ヒ 6 フ 8

(2) ヘ 1 ホ 5 マ 9 ミ 4

(3)

(1)と同様に、点 $(t, f(t))$ を通る接線が $(0, p)$ を通るため、

$$-2t^3 - 9t^2 + 52 = p \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。①が異なる3つの解をもつことが求める条件である。 $g(t) = -2t^3 - 9t^2 + 52$ とすると、
 曲線 $y = g(t)$ と直線 $y = p$ の交点の数と①の解の数が一致する。 $g(t)$ の導関数を計算すると、

$$\begin{aligned} g'(t) &= -6t^2 - 18t \\ &= -6t(t+3) \end{aligned}$$

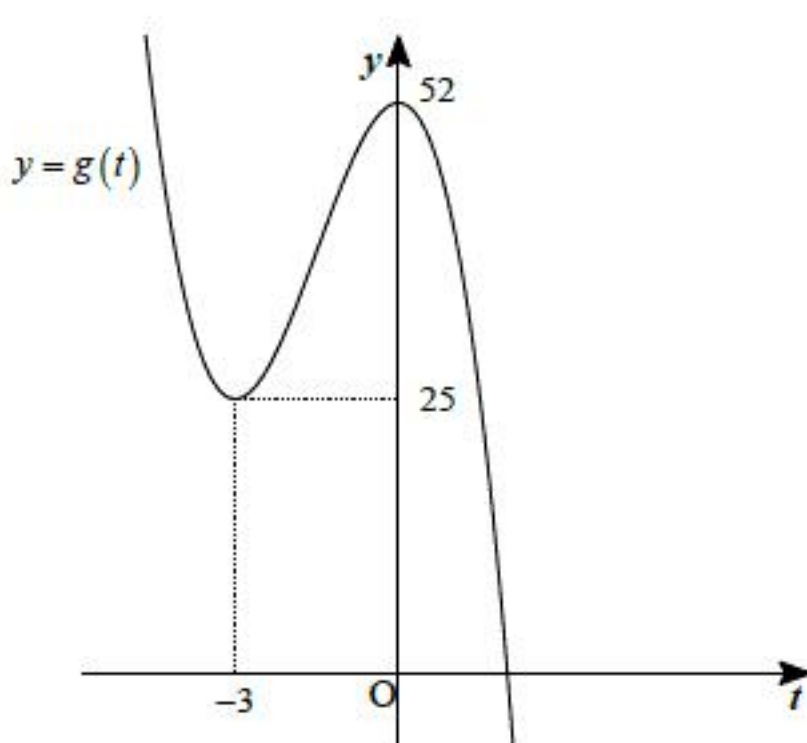
であるから、 $g(t)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	52	$\searrow$

ここで、

$$\begin{aligned} g(-3) &= -2(-3)^3 - 9(-3)^2 + 52 \\ &= 25 \end{aligned}$$

であるから、 $y = g(t)$ のグラフは以下の図のようになる。



以上より、 $25 < p < 52$ のとき曲線 $y = g(t)$ と直線 $y = p$ は3点で交わるため、求める p の条件は、

$$25 < p < 52$$

である。

(答) $25 < p < 52$

〔解説〕

(1)

$f(x) = x^3 + 9x^2 + 20x + 52$ とする。 $f(x)$ の導関数を計算すると、

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 20$$

となるため、点 $(t, f(t))$ を通る接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 + 18t + 20)(x - t) + f(t) \\ &= (3t^2 + 18t + 20)x - 2t^3 - 9t^2 + 52 \end{aligned}$$

となる。この接線が点 $(0, 0)$ を通るため、

$$\begin{aligned} -2t^3 - 9t^2 + 52 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2t^3 + 9t^2 - 52 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-2)(2t^2 + 13t + 26) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-2)\left\{2\left(t + \frac{13}{4}\right)^2 + \frac{39}{8}\right\} &= 0 \\ \therefore t = 2 \left(\because 2\left(t + \frac{13}{4}\right)^2 + \frac{39}{8} > 0 \right) \end{aligned}$$

と求まる。以上より、求める接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (3 \cdot 4 + 18 \cdot 2 + 20)x \\ &= 68x \end{aligned}$$

である。

(2)

(1)と同様に、点 $(t, f(t))$ を通る接線が $(0, 32)$ を通るため、

$$\begin{aligned} -2t^3 - 9t^2 + 52 &= 32 \\ \Leftrightarrow 2t^3 + 9t^2 - 20 &= 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。②の解を α, β, γ とすると、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{9}{2} & \cdots \textcircled{3} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0 & \cdots \textcircled{4} \\ \alpha\beta\gamma = 10 & \cdots \textcircled{5} \end{cases}$$

が成り立つ。接線の傾きの合計は、

$$3\alpha^2 + 18\alpha + 20 + 3\beta^2 + 18\beta + 20 + 3\gamma^2 + 18\gamma + 20 = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 18(\alpha + \beta + \gamma) + 3 \cdot 20$$

となる。③、④より、

$$\begin{aligned} 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 18(\alpha + \beta + \gamma) + 3 \cdot 20 &= 3\left\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\right\} - 18 \cdot \frac{9}{2} + 60 \\ &= 3\left\{\frac{81}{4} - 2 \cdot 0\right\} - 18 \cdot \frac{9}{2} + 60 \\ &= \frac{159}{4} \end{aligned}$$

と求まる。