

【Ⅰ】

〔解答〕

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
K	V	N	G	H	X

〔解説〕

1.

$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ より、

$$\cos \theta > 0, \tan \theta \geq 0$$

であることに注意すると、与式の両辺を $\cos^2 \theta > 0$ で割ることで、

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1 \right) &= \frac{2}{5 \cos^2 \theta} \\ \Leftrightarrow \tan^2 \theta - \tan \theta &= \frac{2}{5} (1 + \tan^2 \theta) \left(\because \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \right) \\ \Leftrightarrow 3 \tan^2 \theta - 5 \tan \theta - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3 \tan \theta + 1)(\tan \theta - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \tan \theta = 2 \quad (\because \tan \theta \geq 0)$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta}} \quad (\because \cos \theta > 0) \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \sqrt{\frac{1}{1 + 2^2}} \quad (\because \tan \theta = 2) \\ \therefore \cos \theta &= \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

であることが分かる。

2.

初項 a 、公差 d の等差数列を $\{a_n\}$ とすると、その一般項は、

$$a_n = a + (n-1)d$$

で与えられるので、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \{a + (k-1)d\} \\ &= (a-d)n + \frac{dn(n+1)}{2} \\ &= \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、 $S_6 = 0$ であることから、

$$\begin{aligned} \frac{d}{2} \cdot 6^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right) \cdot 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 18d + 6a - 3d &= 0 \\ \therefore a &= -\frac{5}{2}d \end{aligned}$$

を得るので、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n \\ &= \frac{d}{2}n^2 - 3dn \\ &= \frac{d}{2}(n-3)^2 - \frac{9d}{2} \end{aligned}$$

となる。 x の関数 $f(x)$ を、

$$f(x) = \frac{d}{2}(x-3)^2 - \frac{9d}{2} \quad (1 \leq x \leq 6)$$

と定めると、曲線 $y = f(x)$ は軸が $x = 3$ の放物線を表す。

[1] $d > 0$ のとき

このとき、 $y = f(x)$ は下に凸な放物線であるから、 $x = 6$ のときに最大値をとる。従って、 S_n も $1 \leq n \leq 6$ においては $n = 6$ で最大値 9 をとることになるが、これは $S_6 = 0$ であることと矛盾する。従って、 $d > 0$ は不適である。

[2] $d < 0$ のとき

このとき、 $y = f(x)$ は上に凸な放物線であるから、 $x = 3$ のときに最大値をとる。従って、 S_n も $1 \leq n \leq 6$ においては $n = 3$ で最大値 9 をとることになるので、

$$\begin{aligned} S_3 &= 9 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{2}(3-3)^2 - \frac{9d}{2} &= 9 \\ \therefore d &= -2 \end{aligned}$$

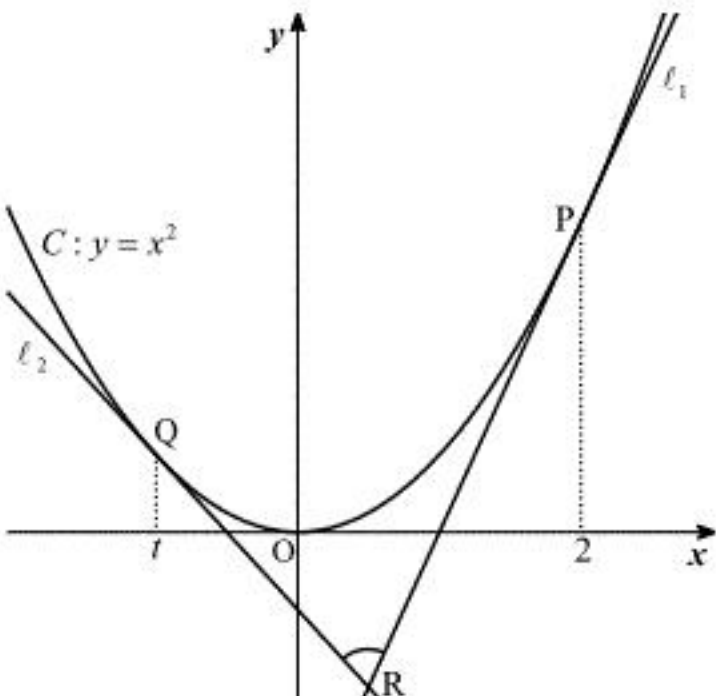
となる。このとき、

$$\begin{aligned} a &= -\frac{5}{2}d \\ &= 5 \end{aligned}$$

である。

3.

題意より、以下の図のようになっている。



放物線 $C: y = x^2$ の方程式について、

$$y' = 2x$$

が成り立つので、 ℓ_1, ℓ_2 の方程式はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \ell_1: y &= 2 \cdot 2(x-2) + 4 = 4x - 4 \\ \ell_2: y &= 2t(x-t) + t^2 = 2tx - t^2 \end{aligned}$$

と与えられる。ここで、点 R より x 座標が大きく y 座標が等しい任意の点を点 R' とし、 ℓ_1, ℓ_2 の傾きをそれぞれ m_1, m_2 とする。このとき、

$$\begin{aligned} \tan \angle R'RP &= m_1 = 4 \\ \tan \angle R'RQ &= m_2 = 2t \end{aligned}$$

であることから、

$$\begin{aligned} \tan \angle PRQ &= \frac{6}{7} \\ \Leftrightarrow \tan(\angle R'RQ - \angle R'RP) &= \frac{6}{7} \\ \Leftrightarrow \frac{\tan \angle R'RQ - \tan \angle R'RP}{1 + \tan \angle R'RQ \tan \angle R'RP} &= \frac{6}{7} \\ \Leftrightarrow \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} &= \frac{6}{7} \\ \Leftrightarrow \frac{2t - 4}{1 + 4 \cdot 2t} &= \frac{6}{7} \\ \therefore t &= -1 \end{aligned}$$

を得る。これより、 ℓ_1, ℓ_2 の交点 R の x 座標を p とおくと、

$$\begin{aligned} 4p - 4 &= 2tp - t^2 \\ \Leftrightarrow p &= \frac{4 - t^2}{4 - 2t} \quad (\because t < 2) \\ \therefore p &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから、 C と ℓ_1, ℓ_2 で囲まれた領域の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \{x^2 - (-2x-1)\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \{x^2 - (4x-4)\} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x+1)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (x-2)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

と求めることができる。

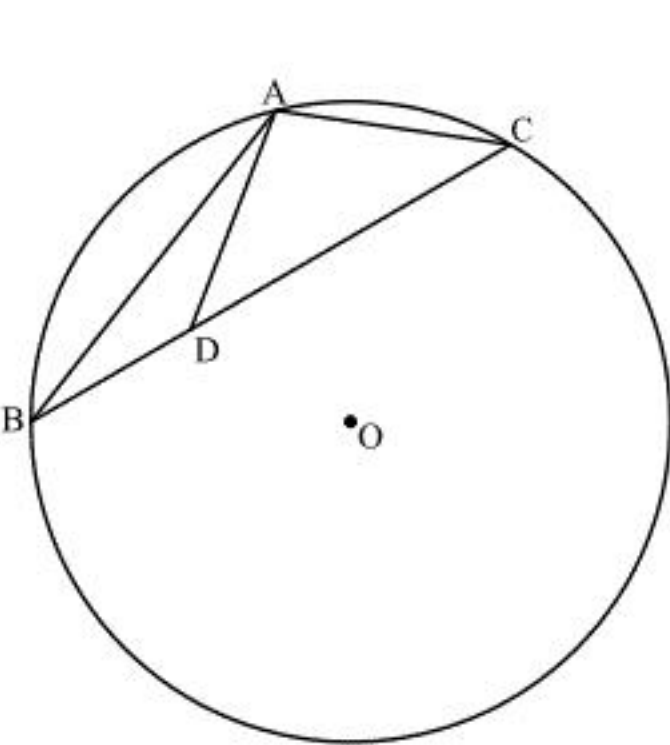
【Ⅱ】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	2	3	2	7	3	3	2	3	1
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
3	4	9	6	7	3	4	5	4	9

【解説】

△ABCは以下の図のようになっている。



△ABCについて余弦定理を用いて、

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \\ &= \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} \\ &= -\frac{1}{2} \\ \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \ (\because \sin A > 0) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

を得る。また、これより

$$\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$$

とわかる。△ABCの外接円の半径を R とすると、正弦定理より、

$$\begin{aligned}\frac{BC}{\sin A} &= 2R \\ \therefore R &= \frac{7}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

と求めることができる。また、BC上の点Dが△ABD:△ADC=1:2を満たすとき、

$$BD:DC=1:2$$

が成り立つので、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

と書ける。ここで、弧BCのうち点Aが存在しない方の上に点Eをとると、

$$\begin{aligned}\angle BOC &= 2\angle BEC \\ &= 2(\pi - \angle BAC) \\ &= \frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}| \cos \angle BOC \\ &= R^2 \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{49}{6}\end{aligned}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned}OD &= |\overrightarrow{OD}| \\ &= \sqrt{|\overrightarrow{OD}|^2} \\ &= \sqrt{\left| \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \right|^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{3} \right)^2 |\overrightarrow{OB}|^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \left(\frac{1}{3} \right)^2 |\overrightarrow{OC}|^2} \\ &= \sqrt{\frac{4}{9}R^2 + \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{49}{6} \right) + \frac{1}{9}R^2} \\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

と求めることができる。また、

$$\triangle BOD:\triangle COD=\triangle ABD:\triangle ADC=1:2$$

より、△BACの面積を S_1 、△BOCの面積を S_2 とおくと、求める面積比は

$$\frac{S_1}{S_2}$$

に一致するので、

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{15\sqrt{3}}{4} \\ S_2 &= \frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot \sin \angle BOC \\ &= \frac{1}{2}R^2 \sin \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{49\sqrt{3}}{12}\end{aligned}$$

より、求める面積比は

$$\frac{\frac{15\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{12}} = \frac{45}{49}$$

である。

〔Ⅲ〕

1.

大学側から設問に誤りがあったことが公表されました。

2.

$$\begin{aligned}x^3 - cx &> \sqrt{c}x^2 - 8 \\ \Leftrightarrow x^3 - \sqrt{c}x^2 - cx + 8 &> 0\end{aligned}$$

より、 x の関数 $f(x)$ を、

$$f(x) = x^3 - \sqrt{c}x^2 - cx + 8 \quad (x > 0)$$

と定めると、すべての $x > 0$ に対して与えられた不等式が成り立つということは、 $f(x) > 0$ が常に成り立つということと同値である。ここで、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 2\sqrt{c}x - c &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x + \sqrt{c})(x - \sqrt{c}) &= 0 \\ \therefore x &= \sqrt{c} \quad (\because x > 0)\end{aligned}$$

となるので、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{c}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	最小値	$\nearrow$

従って、与えられた不等式がすべての $x > 0$ に対して成り立つような c の範囲は、

$$\begin{aligned}f(\sqrt{c}) &> 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{c})^3 - \sqrt{c}(\sqrt{c})^2 - c\sqrt{c} + 8 &> 0 \\ \Leftrightarrow c\sqrt{c} &< 8 \\ \therefore 0 < c < 4 \quad (\because c > 0)\end{aligned}$$

である。

(答) $0 < c < 4$

3.

3 次関数 $f(x)$ と 2 次関数 $g(x)$ の $x = a$ における接線が一致する必要十分条件は、

$$\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。これを満たすような実数 a が高々 1 つしか存在しないことを示せばよい。ここで、3 次関数 $h(x)$ を、

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

と定めると、

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

より、①は

$$\begin{cases} h(a) = 0 \\ h'(a) = 0 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

と同値である。 $h'(x)$ は 2 次関数であるから、 $h'(x) = 0$ の解は高々 2 つである。

$h'(a) = 0$ を満たすような a が 1 つ以下しか存在しないとき、②を満たすような a は高々 1 つしか存在しない。

$h'(a) = 0$ を満たすような a が 2 つ存在するとき、そのような a を a_1, a_2 ($a_1 < a_2$) とすると、0 でない実数 p を用いて

$$h'(x) = p(x - a_1)(x - a_2)$$

と表せるので、 $a_1 < x < a_2$ において $h(x)$ は単調増加または単調減少であり、 $h(a_1) \neq h(a_2)$ が成り立つ。よって、

$$h(a_1) \neq 0 \text{ または } h(a_2) \neq 0$$

となり、②を満たすような a が 2 つ以上存在することはない。

以上より、①を満たすような実数 a は高々 1 つしか存在しないことが分かるので、 $x = a$ における $f(x)$ と $g(x)$ の接線が一致するような実数 a は高々 1 つしか存在しないことが示された。

(証明終)