

【Ⅰ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
	3	5	4	5	6	5	8	4	6	3	9	8	6	5	8
(2)	タ	チ	ツ												
	2	1	2												
(3)	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ								
	3	0	3	0	1	8	6								

【解説】

(1)(a)

余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot CA} \\ &= \frac{15^2 + 14^2 - 13^2}{2 \cdot 15 \cdot 14} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

となる。また、 $0^\circ < A < 180^\circ$ より $\sin A > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

となる。

(b)

正弦定理より、外接円の半径 R は

$$\begin{aligned}R &= \frac{BC}{2 \sin A} \\ &= \frac{13}{2 \cdot \frac{4}{5}} \\ &= \frac{65}{8}\end{aligned}$$

となる。

また、内接円の半径を r とし、 $\triangle ABC$ の面積 S について考えると

$$\begin{aligned}(S) &= \frac{1}{2}r(AB + BC + CA) = \frac{1}{2}AB \cdot CA \cdot \sin A \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}r(15 + 13 + 14) &= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 14 \cdot \frac{4}{5} \\ \therefore r &= 4\end{aligned}$$

を得る。

(c)

辺 CA と内接円の接点を E 、辺 AB と内接円の接点を F とする。内接円の中心を O とすれば、

$$\begin{aligned}\triangle COD &\text{と} \triangle COE \\ \triangle AOE &\text{と} \triangle AOF \\ \triangle BOF &\text{と} \triangle BOD\end{aligned}$$

はそれぞれ合同である。 $DC = x$ とおけば、この合同性より

$$\begin{aligned}EC &= x \\ EA &= 14 - x \\ FA &= 14 - x \\ FB &= 1 + x \\ DB &= 1 + x\end{aligned}$$

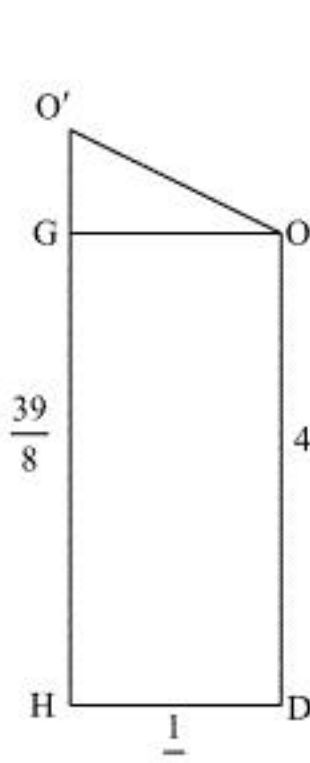
が順次得られる。よって

$$\begin{aligned}BC &= 13 \\ \Leftrightarrow DB + DC &= 13 \\ \Leftrightarrow (1 + x) + x &= 13 \\ \therefore x &= 6\end{aligned}$$

となる。また、外接円の中心を O' とおくと、 $\triangle BO'C$ は $BO' = CO' = R$ の二等辺三角形であるから、 O' から BC に下ろした垂線の足を H とおくと、 O' と BC の距離と等しい $O'H$ の長さは、三平方の定理より

$$\begin{aligned}O'H &= \sqrt{R^2 - (BH)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{65}{8}\right)^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{65}{8}\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2} \\ &= \frac{39}{8}\end{aligned}$$

と求まる。ここで OD 、 $O'H$ はいずれも BC に垂直であるから、四角形 $OO'HD$ は下図のような OD と $O'H$ が平行である台形となる。



上図のように点 O から直線 $O'H$ に下ろした垂線の足を G とおくと、 $O'G$ の長さは

$$\begin{aligned}O'G &= O'H - GH \\ &= O'H - OD \\ &= \frac{39}{8} - 4 \\ &= \frac{7}{8}\end{aligned}$$

となるから、内心と外心の距離 OO' は、三平方の定理より

$$\begin{aligned}OO' &= \sqrt{O'G^2 + GO^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{65}}{8}\end{aligned}$$

と求まる。

(2)

題意の条件より、実数 a, b ($a \neq 0$) を用いて

$$\begin{aligned}x^4 &= (ax + b)f(x) + 5x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1) &= (ax + b)f(x) \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $\textcircled{1}$ 式両辺に $x = 1$ をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}(a + b)f(1) &= 0 \\ \therefore b &= -a \quad (\because f(1) \neq 0)\end{aligned}$$

となる。これを $\textcircled{1}$ 式に代入し、整理すると関数 $f(x)$ は

$$(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1) = a(x - 1)f(x)$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{a}(x + 2)(x + 1)(x - 2)$$

であることがわかる。したがって、方程式 $f(x) = 0$ の解は小さい順に

$$x = -2, -1, 2$$

である。

(3)(a)

大きさの異なる 2 個のさいころを振るとき、出た目をそれぞれ a, b とする。 a, b の和が 7 であるような目の出方 (a, b) は

$$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$$

の 6 通りである。また、目の出方 (a, b) の総数は $6^2 (= 36)$ であるから、求める場合の数は

$$36 - 6 = 30 \quad \text{[通り]}$$

である。

(b)

大きさの異なる 3 個のさいころを振るとき、出た目をそれぞれ a, b, c とする。 a, b の和が 7 でないとき、 a, b, c の和を 7 の倍数とするような c はただ一つ存在し、一方で a, b の和が 7 の倍数であるときは c がどんな値 ($1 \leq c \leq 6$) でも a, b, c の和は 7 の倍数とならない。したがって、 a, b, c の和が 7 の倍数となる目の出方は a, b の和が 7 でないような目の出方 (a, b) と 1 対 1 対応するから、求める場合の数は (1) の値と一致し、

$$30 \text{ [通り]}$$

である。

(c)

大きさの異なる 4 個のさいころを振るとき、出た目をそれぞれ a, b, c, d とする。 a, b, c の和が 7 の倍数でないとき、 a, b, c, d の和を 7 の倍数とするような d はただ一つ存在し、一方で a, b, c の和が 7 の倍数であるときは d がどんな値 ($1 \leq d \leq 6$) でも a, b, c, d の和は 7 の倍数とならない。したがって、 a, b, c, d の和が 7 の倍数となる目の出方は a, b, c の和が 7 の倍数でないような目の出方 (a, b, c) と 1 対 1 対応する。また、目の出方 (a, b, c) の総数は $6^3 (= 216)$ であるから、(b) の結果より、求める場合の数は

$$216 - 30 = 186 \quad \text{[通り]}$$

である。

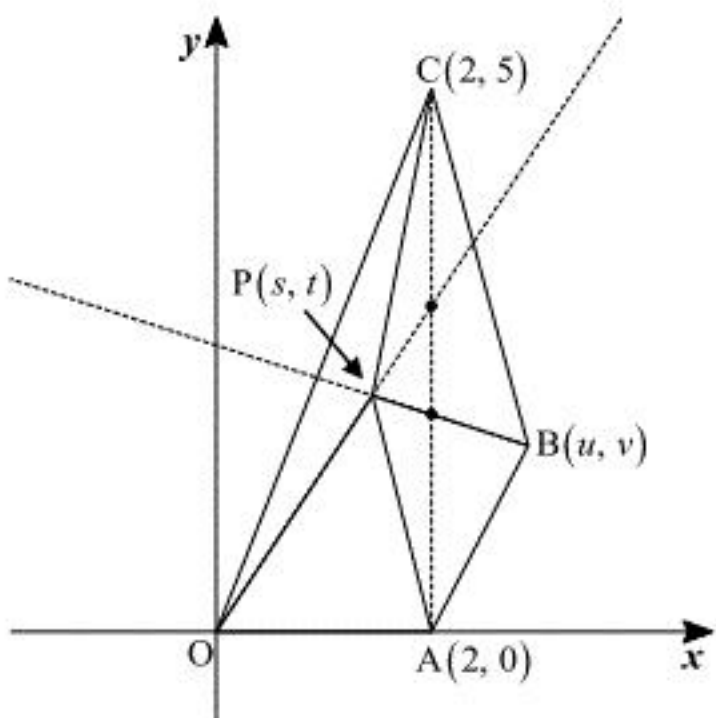
【Ⅱ】

【解答】

(1)	あ		
	$\frac{3}{4}u$		
(2)	い	う	え
	2:3	(2, 3)	$\frac{2}{3}t$
(3)	お		
	(2, 2)		
(4)	か	き	
	$\frac{u(3u-10)}{2(u-4)}$	$2 < u < \frac{10}{3}$ または $5 < u$	

【解説】

(1)



三角形 POA，四角形 OABC の面積は，それぞれ t, u を用いて

$$(\text{三角形 POA の面積})=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot t=t$$

$$(\text{四角形 OABC の面積})=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot (u-2)=\frac{5}{2}u$$

と表せる。これらの図形の面積比が $3:10$ であるとき， t は u を用いて

$$t:\frac{5}{2}u=3:10$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{3}{4}u$$

と表せる。また，逆に $t=\frac{3}{4}u$ のとき三角形 POA と四角形 OABC の面積比は $3:10$ となることに注意する。

(2)

三角形 PCO と三角形 POA の面積比が $2:3$ であるとき，点 C から直線 OP に下ろした垂線の足を D，点 A から直線 OP に下ろした垂線の足を E とおくと，垂線の長さの比 CD:AE は

$$\frac{1}{2}\text{OP}\cdot\text{CD}:\frac{1}{2}\text{OP}\cdot\text{AE}=2:3$$

$$\Leftrightarrow \text{CD}:\text{AE}=2:3$$

と求まる。したがって，直線 OP と線分 CA の交点は，線分 CA を $2:3$ に内分する点であり，その点の座標は

$$\left(2,\frac{3\cdot 5+2\cdot 0}{2+3}\right)=(2,3)$$

となる。ゆえに，点 P(s, t) は原点 O と点 $(2, 3)$ を結ぶ直線上に存在することになるから， s は t を用いて

$$s:t=2:3$$

$$\Leftrightarrow s=\frac{2}{3}t$$

と表せる。また，逆に $s=\frac{2}{3}t$ のとき三角形 PCO と三角形 POA の面積比は $2:3$ となることに注意する。

(3)

直線 PB と線分 CA の交点を F とおく。三角形 PAB と三角形 PBC の面積比が $2:3$ であるとき，(2)と同様に考えることで，AF:FC は

$$\text{AF}:\text{FC}=2:3$$

と求まるから，点 F は線分 CA を $3:2$ に内分する点であることがわかり，その座標は

$$\left(2,\frac{3\cdot 0+2\cdot 5}{5}\right)=(2,2)$$

となる。また，逆に点 F の座標が $(2, 2)$ となるとき三角形 PAB と三角形 PBC の面積比は $2:3$ となることに注意する。

(4)

三角形 PCO，三角形 POA，三角形 PAB，三角形 PBC の面積比が $2:3:2:3$ のとき，(1), (2), (3) における仮定が成立するから，これらの結果より

$$t=\frac{3}{4}u \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \text{①}$$

$$s=\frac{2}{3}t \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \text{②}$$

$$(v-t)(2-s)=(u-s)(2-t) \quad \cdots \cdots \text{③}$$

が成立する。また，逆に①かつ②かつ③が成立するとき，三角形 PCO，三角形 POA，三角形 PAB，三角形 PBC の面積比は $2:3:2:3$ となることに注意する。①，②より

$$s=\frac{2}{3}\cdot \frac{3}{4}u=\frac{1}{2}u$$

となるから，これを③に代入することで

$$\left(v-\frac{3}{4}u\right)\left(2-\frac{1}{2}u\right)=\left(u-\frac{1}{2}u\right)\left(2-\frac{3}{4}u\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(v-\frac{3}{4}u\right)(4-u)=u\left(2-\frac{3}{4}u\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(v-\frac{3}{4}u\right)(4-u)=u\left(2-\frac{3}{4}u\right) \quad \text{かつ} \quad u\neq 4$$

$$\Leftrightarrow v=\frac{u}{4-u}\left(2-\frac{3}{4}u\right)+\frac{3}{4}u$$

$$\Leftrightarrow v=\frac{u(3u-10)}{2(u-4)}$$

を得る。また， u のとりうる値の範囲は， $u>2, 0<v<\frac{5}{2}u$ より

$$u>2 \quad \text{かつ} \quad 0<\frac{u(3u-10)}{2(u-4)}<\frac{5}{2}u$$

$$\Leftrightarrow u>2 \quad \text{かつ} \quad 0<(3u-10)(u-4)<5(u-4)^2 \quad \text{かつ} \quad u\neq 4$$

$$\Leftrightarrow u>2 \quad \text{かつ} \quad (u<\frac{10}{3} \text{ または } 4<u) \quad \text{かつ} \quad (u<4 \text{ または } 5<u)$$

$$\Leftrightarrow 2<u<\frac{10}{3} \quad \text{または} \quad 5<u$$

と求まる。

【Ⅲ】

〔解答〕

(1)	$\boxed{<}$	$\boxed{>}$
	$2a-x$	$2-y$
(2)	$\boxed{=}$	
	$y=2-\log(2a-x)$	
(3)	(a)	(b)
	$a=\frac{5}{4}e, x=\frac{e}{2}$	$5e\log 2-3e$

〔解説〕

(1)

点Pの座標を (p, q) とおく。本問において、点Pが点Aに関して点Q (x, y) と対称な点であるということは、Aが線分PQの中点であるということであるから、

$$\begin{cases} \frac{x+p}{2}=a \\ \frac{y+q}{2}=1 \end{cases}$$

$$\therefore (p, q)=(2a-x, 2-y)$$

と求まる。したがって、点Pの座標は $(2a-x, 2-y)$ と表される。

(2)

(1)の結果より、点Qの座標を (x, y) としたとき、点Pの座標は $(2a-x, 2-y)$ であるから、軌跡 C' の方程式は

$$\begin{aligned} Q(x, y) \in C' &\Leftrightarrow P(2a-x, 2-y) \in C \\ &\Leftrightarrow 2-y=\log(2a-x) \\ &\Leftrightarrow y=2-\log(2a-x) \end{aligned}$$

と求まる。

(3)(a)

C と C' が直線 $x=2e$ 上に共有点をもつとき、 a の値は

$$\begin{aligned} 2-\log(2a-2e) &=\log 2e \\ \Leftrightarrow \log e^2 &=\log\{4e(a-e)\} \\ \Leftrightarrow e^2 &=4e(a-e) \\ \Leftrightarrow e(4a-5e) &=0 \\ \therefore a &=\frac{5}{4}e \end{aligned}$$

と求まる。また、このとき C と C' の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} 2-\log\left(\frac{5}{2}e-x\right) &=\log x \\ \Leftrightarrow \log e^2 &=\log\left(\frac{5}{2}e-x\right)x \quad \text{かつ} \quad 0 < x < \frac{5}{2}e \\ \Leftrightarrow 2x^2-5ex+2e^2 &=0 \quad \text{かつ} \quad 0 < x < \frac{5}{2}e \\ \Leftrightarrow (2x-e)(x-2e) &=0 \quad \text{かつ} \quad 0 < x < \frac{5}{2}e \\ \therefore x &=\frac{e}{2}, 2e \end{aligned}$$

であるから、求める x 座標は $\frac{e}{2}$ である。

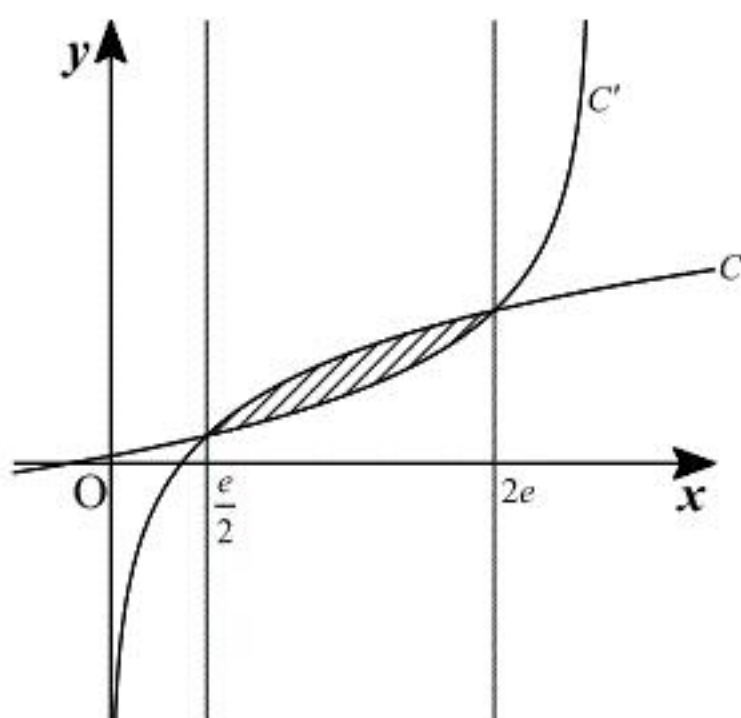
(b)

(a)における考察より、 $\frac{e}{2} < x < 2e$ のとき

$$\begin{aligned} (2x-e)(x-2e) &< 0 \\ \Leftrightarrow \log e^2 &< \log\left(\frac{5}{2}e-x\right)x \\ \Leftrightarrow 2-\log\left(\frac{5}{2}e-x\right) &< \log x \end{aligned}$$

であり、同様にして $(0 <)x < \frac{e}{2}, 2e < x(< \frac{5}{2}e)$ のとき $2-\log\left(\frac{5}{2}e-x\right) > \log x$ であるから、 C と C' の上下関係は以下の表、図のようになる。

x	$(0 <)x < \frac{e}{2}$	$\frac{e}{2} < x < 2e$	$2e < x(< \frac{5}{2}e)$
上下関係	C' が上側	C が上側	C' が上側



したがって、 C と C' によって囲まれる部分は $\frac{e}{2} < x < 2e$ の部分であり、この部分の面積は、

部分積分法を用いることで

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{e}{2}}^{2e} \left\{ \log x - 2 + \log\left(\frac{5}{2}e-x\right) \right\} dx \\ &= \int_{\frac{e}{2}}^{2e} \log x dx - 2 \int_{\frac{e}{2}}^{2e} dx + \int_{\frac{e}{2}}^{2e} \log\left(\frac{5}{2}e-x\right) dx \\ &= \left\{ [x \log x]_{\frac{e}{2}}^{2e} - \int_{\frac{e}{2}}^{2e} x \cdot \frac{1}{x} dx \right\} - 2 \left(2e - \frac{e}{2} \right) \\ &\quad + \left\{ \left[-\left(\frac{5}{2}e-x\right) \log\left(\frac{5}{2}e-x\right) \right]_{\frac{e}{2}}^{2e} - \int_{\frac{e}{2}}^{2e} -\left(\frac{5}{2}e-x\right) \cdot \frac{-1}{\left(\frac{5}{2}e-x\right)} dx \right\} \\ &= \left\{ 2e \log(2e) - \frac{e}{2} \log\left(\frac{e}{2}\right) - \left(2e - \frac{e}{2} \right) \right\} - 2 \left(2e - \frac{e}{2} \right) \\ &\quad + \left\{ -\frac{e}{2} \log\left(\frac{e}{2}\right) + 2e \log(2e) - \left(2e - \frac{e}{2} \right) \right\} \\ &= 5e \log 2 - 3e \end{aligned}$$

と求まる。