

〔 I 〕

〔解答〕

1 E 2 A 3 E

〔解説〕

(1)

与えられた座標より

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (\ell - 2, 4, m + 3)$$

となる。従って、点 C が直線 AB 上にあるとき、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow (\ell - 2, 4, m + 3) = k(1, -2, 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ell - 2 = k \\ 4 = -2k \\ m + 3 = 3k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ \ell = 0 \\ m = -9 \end{cases}$$

となる。

(2)

与えられた座標より

$$\overrightarrow{PQ} = (-7, 6, -9)$$

$$\overrightarrow{PR} = (-3, 4, -1)$$

となる。従って、点 S が平面 PQR 上にあるとき、実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}$$

$$= (4, -2, 5) + s(-7, 6, -9) + t(-3, 4, -1)$$

$$= (4 - 7s - 3t, -2 + 6s + 4t, 5 - 9s - t)$$

となるが、これは $(n, 1 - n, 4)$ に等しいので

$$\begin{cases} 4 - 7s - 3t = n \\ -2 + 6s + 4t = 1 - n \\ 5 - 9s - t = 4 \end{cases}$$

が得られる。これを解くと

$$\begin{cases} s = \frac{1}{5} \\ t = -\frac{4}{5} \\ n = 5 \end{cases}$$

とわかる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

4

H

〔解説〕

求める桁数を n とすると

$$10^{n-1} \leq 6^{36} < 10^n$$

が成り立つ。各辺について常用対数をとると

$$\log_{10} 10^{n-1} \leq \log_{10} 6^{36} < \log_{10} 10^n$$

$$\Leftrightarrow n-1 \leq 36 \log_{10} 6 < n$$

$$\Leftrightarrow n-1 \leq 36(\log_{10} 3 + \log_{10} 2) < n$$

$$\Leftrightarrow n-1 \leq 28.0116 < n$$

となるので,

$$n = 29$$

とわかる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

5

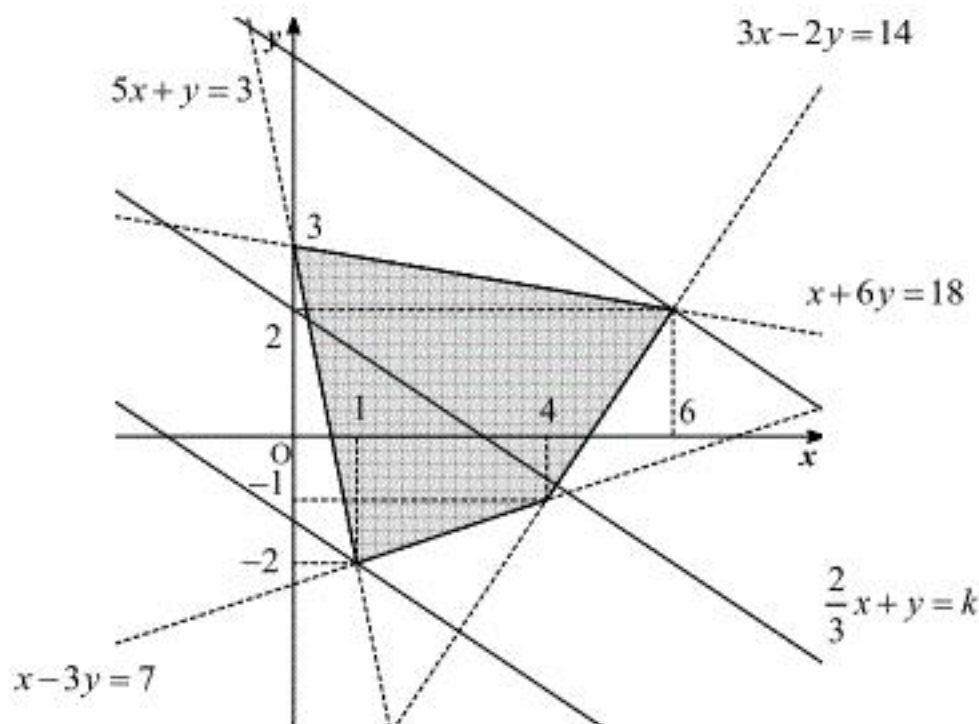
G

6

E

〔解説〕

条件の連立不等式を満たす領域を図示すると下図の斜線部のようなになる(ただし境界を含む)。



$\frac{2}{3}x + y = k$ とおくと、連立不等式の表す領域を点 (x, y) が動くときの k の値は、直線

$\frac{2}{3}x + y = k$ が上図の斜線部と共有点を持つときの k の値に対応する。 k は傾き $-\frac{2}{3}$ の直線の y

切片であるから、上図より k が最大となるのは点 $(6, 2)$ を通るときであり、このとき

$$\begin{aligned} k &= \frac{2}{3}x + y \\ &= 6 \end{aligned}$$

である。また、最小となるのは点 $(1, -2)$ を通るときであり、

$$\begin{aligned} k &= \frac{2}{3}x + y \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

7	I	8	D	9	E
101	$\frac{1}{3}(1-b_n)$				
102	$\frac{61}{243}$				

〔解説〕

(1)

最短でGに到達するのは3秒後である。このとき、1秒後にはB, D, Eのいずれかに移動するので、Bに移動することを考えると

$$\begin{aligned} A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G \\ A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow G \end{aligned}$$

の2通りが考えられる。対称性より、D, Eに移動したときも2通りずつあるので、3秒後にGに到達するのは6通りである。また最も長い時間でGに到達するのは全頂点を通る7秒後である。このときも1秒後にBに移動することを考えると

$$\begin{aligned} A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \\ A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow G \end{aligned}$$

の2通りが考えられる。対称性より、D, Eに移動したときも2通りずつあるので、7秒後にGに到達するのは6通りである。4秒後、6秒後にGに到達することはできないので5秒後に到達することを考えると、1秒後にBに移動するとき

$$\begin{aligned} A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow G \\ A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow G \end{aligned}$$

の2通りが考えられる。対称性より、D, Eに移動したときも2通りずつあるので、5秒後にGに到達するのは6通りである。以上より全部で18通り考えられる。

(2)

$n+1$ 秒後の状態は、 n 秒後の状態から決定される。 n 秒後にBにいた場合、同じ点にとどまることはないので、 $n+1$ 秒後にBにいる確率は0である。 n 秒後にB以外の点にいた場合、いずれの点にいても $\frac{1}{3}$ の確率で $n+1$ 秒後にBに存在することになる。これより漸化式を立てると

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n \cdot 0 + (1-b_n) \cdot \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= \frac{1}{3}(1-b_n) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - \frac{1}{4} &= -\frac{1}{3}\left(b_n - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $b_0 = 0$ より、一般項は

$$b_n = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$$

とわかるので、 $n=5$ を代入すると

$$b_5 = \frac{61}{243}$$

が得られる。

〔V〕

〔解答〕

10	H	11	I	12	G
103	$\frac{9\sqrt{3}}{5}$				

〔解説〕

(1)

正四面体 $ABCD$ の重心を G 、 A から面 BCD に下ろした垂線の足を E とする。 G は重心なので、線分 AE 上に存在する。また、 A から辺 CD 上に下ろした垂線の足を F とする。ここで、正四面体の1辺の長さを x とすると、線分 AF , BF の長さはともに $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ とわかる。 E は三角形 BCD の重心であるから、

$$BE:EF=2:1$$

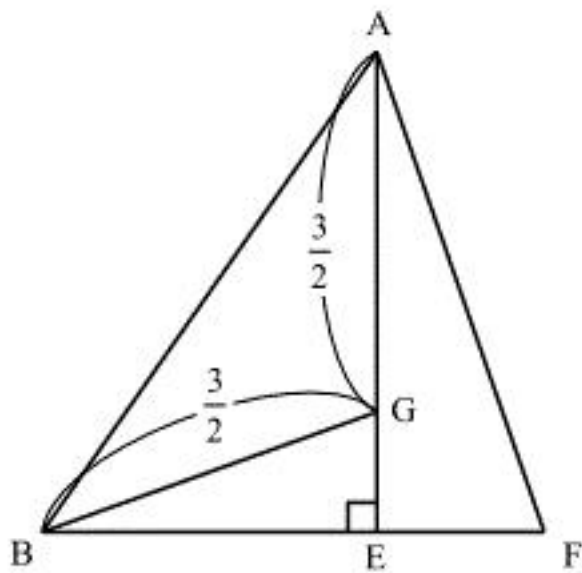
となる。これより

$$BE=\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

である。三角形 ABE に注目すると、三平方の定理より

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}x \end{aligned}$$

となる。



このとき、三角形 BGE についての三平方の定理より、 x の値は

$$\begin{aligned} BG^2 &= BE^2 + EG^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}x - \frac{3}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{6}x &= 0 \\ \therefore x &= \sqrt{6} \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

と求められる。また、この正四面体 V_1 の体積は

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3} \triangle BCD \times AE \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}x \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}x^3 \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(2)

直方体 $ABCD-EFGH$ の重心を原点 O とし、 O から長方形 $BCGF$ の重心に向かう方向を x 軸、 O から長方形 $CDHG$ の重心に向かう方向を y 軸、 O から長方形 $ABCD$ の重心に向かう方向を z 軸とする。このとき C の座標は $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ である。頂点 C が球面 $x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ 上に存在することから、

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 &= 9 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $a=3b$ であることを用いると

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow 10b^2 + c^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow b^2 &= \frac{9-c^2}{10} \end{aligned}$$

となり、 c の範囲は

$$\begin{aligned} 0 < c^2 < 9 \\ \therefore 0 < c < 3 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。直方体の体積を V_2 として、 V_2 を c で表すと

$$\begin{aligned} V_2 &= abc \\ &= 3b^2c \\ &= 3 \cdot \frac{9-c^2}{10} \cdot c \\ &= -\frac{3}{10}(c^3 - 9c) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dc} &= -\frac{3}{10}(3c^2 - 9) \\ &= -\frac{9}{10}(c^2 - 3) \\ &= -\frac{9}{10}(c - \sqrt{3})(c + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

より①の範囲における V_2 の増減表は下のようになる。

c	(0)	...	$\sqrt{3}$	...	(3)
$\frac{dV_2}{dc}$		+	0	-	
V_2			最大		

従って、 $c=\sqrt{3}$ のとき、 V_2 は最大となり

$$\begin{aligned} V_2 &= -\frac{3}{10}(3\sqrt{3} - 9\sqrt{3}) \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

とわかる。