

〔 I 〕

〔解答〕

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
最大:	A	C	B	B	C
最小:	B	A	A	C	B

〔解説〕

(1)

Bは底の変換公式より

$$\begin{aligned}\log_3 2 &= \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \\ &= \frac{1}{\log_2 3}\end{aligned}$$

となる。また、Cを整理すると

$$\begin{aligned}\frac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_2 \sqrt{2}} &= \frac{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\log_2 3 > 1$$

より

$$\begin{aligned}\log_2 3 > 1 &> \frac{1}{\log_2 3} \\ \therefore \log_2 3 &> \frac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_2 \sqrt{2}} > \log_3 2\end{aligned}$$

とわかる。

(2)

条件より

$$\begin{aligned}&\begin{cases} c^2 - ab - bc + ac > 0 \\ ab + bc - a^2 - ac > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} c(c-b) + a(c-b) > 0 \\ b(a+c) - a(a+c) > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (c+a)(c-b) > 0 \\ (b-a)(c+a) > 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。ここで $a > 0, b > 0, c > 0$ より

$$c + a > 0$$

であるから、①より

$$\begin{aligned}&\begin{cases} c - b > 0 \\ b - a > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &c > b > a\end{aligned}$$

とわかる。

(3)

等比数列 $\{a_n\}$ の初項を a_1 、公比を r とすると一般項は

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

と表せる。第4項から初項を引いた値は14なので

$$a_4 r^3 - a_1 = 14$$

$$\therefore (r^3 - 1)a_1 = 14 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。第5項から第2項を引いた値は7なので

$$a_5 r^4 - a_2 r = 7$$

$$\therefore r(r^3 - 1)a_1 = 7 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①、②より

$$\begin{aligned}r &= \frac{1}{2} \\ a_1 &= -16\end{aligned}$$

とわかる。また、第3項は

$$\begin{aligned}a_3 &= -16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} \\ &= -4\end{aligned}$$

であるから、

$$a_1 < a_3 < r$$

とわかる。

(4)

点Rは直線PQ上にあるので、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overline{\text{OR}} &= \overline{\text{OP}} + k\overline{\text{PQ}} \\ &= (0, 1, 0) + k(1, 1, 3) \\ &= (k, k+1, 3k)\end{aligned}$$

となる。また、点Rは平面 $y = -1$ 上にあるので

$$\begin{aligned}k+1 &= -1 \\ \therefore k &= -2\end{aligned}$$

である。以上より点Rの座標は $(-2, -1, -6)$ である。

(5)

「 $m+n < 0$ 」であるための必要条件にあたる条件は

- ・ m は負、または、 n は負である

の1つである。「 $\frac{m}{n} < 0$ 」であるための十分条件にあたる条件はない。「 $mn > 0$ 」であるため

の十分条件にあたる条件は

- ・ m, n はともに負である
- ・ m, n はともに正である

の2つである。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

- (1) ア 3 イ 0 ウ 2 エ 8
- (2) オ -2 カ +3 (+2 も可)
- (3) キ +2 ク -1

〔解説〕

(1)

Iは△ABCの内心であるから直線IAは∠Aの2等分線である。従って

$$\begin{aligned} BD:DC &= AB:AC \\ &= 7:5 \end{aligned}$$

となるので、△CADの面積は

$$\begin{aligned} \triangle CAD &= \triangle ABC \times \frac{5}{12} \\ &= 30 \end{aligned}$$

である。内心Iから△ABCの各辺までの距離は等しいので、AB, BC, CAをそれぞれ△IAB, △IBC, △ICAの底辺とすると3つの三角形の高さは等しい。従って、△IABの面積は

$$\begin{aligned} \triangle IAB &= \triangle ABC \times \frac{7}{7+6+5} \\ &= 28 \end{aligned}$$

である。

(2)

$f(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2x - 21 \\ &= (x-3)(3x+7) \end{aligned}$$

となるので増減表は下のようになる。

x	...	$-\frac{7}{3}$	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

従って、単調減少する区間は

$$-\frac{7}{3} \leq x \leq 3$$

であるから、 a がとりうる最小の値は-2、 b がとりうる最大の値は3である。

(注)

上記解答では問題文中の単調減少を広義単調減少としている。一般に

$$f'(x) \leq 0$$

である x の区間は広義単調減少と呼ぶが、 $f'(x)=0$ を含まない

$$f'(x) < 0$$

である x の区間は狭義単調減少と呼ぶ。従って、問題文中の単調減少を狭義単調減少とした場合

$$-\frac{7}{3} < x < 3$$

が狭義単調減少する区間であるから、 b がとりうる最大の値は2であり、これも正解である。

(3)

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \cdot 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\alpha \sin \alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 \alpha}{\alpha \sin \alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-1 \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

と求められる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

$$\begin{array}{llllll}
 (1) & \text{サ} & 2\alpha + p & \text{シ} & -\alpha^2 + q & \text{ス} & 2\beta + r & \text{セ} & -\beta^2 + s \\
 & \text{ソ} & 2\beta - 2\alpha & \text{タ} & \alpha^2 - \beta^2 & \text{チ} & \frac{\alpha + \beta}{2} \\
 (2) & \text{ツ} & x - \alpha & \text{テ} & x - \beta & \text{ト} & \frac{(\beta - \alpha)^3}{12}
 \end{array}$$

〔解説〕

(1)

C_1 の方程式を x で微分すると

$$y' = 2x + p$$

となるので、 C_1 上の点 $(\alpha, \alpha^2 + p\alpha + q)$ における接線の方程式は

$$y - (\alpha^2 + p\alpha + q) = (2\alpha + p)(x - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow y = (2\alpha + p)x + (-\alpha^2 + q) \quad \dots \textcircled{3}$$

と表される。同様にして、 C_2 の方程式を x で微分すると

$$y' = 2x + r$$

となるので、 C_2 上の点 $(\beta, \beta^2 + r\beta + s)$ における接線の方程式は

$$y - (\beta^2 + r\beta + s) = (2\beta + r)(x - \beta)$$

$$\Leftrightarrow y = (2\beta + r)x + (-\beta^2 + s) \quad \dots \textcircled{4}$$

と表される。③と④は同一の式となるので

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 2\alpha + p = 2\beta + r \\ -\alpha^2 + q = -\beta^2 + s \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} p - r = 2\beta - 2\alpha \\ q - s = \alpha^2 - \beta^2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

となる。一方、 C_1 と C_2 の交点の x 座標 t は

$$\begin{aligned}
 t^2 + pt + q &= t^2 + rt + s \\
 \Leftrightarrow t &= \frac{s - q}{p - r} \quad (\because p \neq r)
 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{-(\alpha^2 - \beta^2)}{2\beta - 2\alpha} \\
 &= \frac{-(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{-2(\alpha - \beta)} \\
 &= \frac{\alpha + \beta}{2}
 \end{aligned}$$

と表される。

(2)

C_1 と C_2 と l で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\alpha}^t \left\{ (x^2 + px + q) - \left\{ (2\alpha + p)x + (-\alpha^2 + q) \right\} \right\} dx \\
 &\quad + \int_t^{\beta} \left\{ (x^2 + rx + s) - \left\{ (2\beta + r)x + (-\beta^2 + s) \right\} \right\} dx \\
 &= \int_{\alpha}^t (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) dx + \int_t^{\beta} (x^2 - 2\beta x + \beta^2) dx \\
 &= \int_{\alpha}^t (x - \alpha)^2 dx + \int_t^{\beta} (x - \beta)^2 dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} (x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^t + \left[\frac{1}{3} (x - \beta)^3 \right]_t^{\beta} \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ (t - \alpha)^3 - (t - \beta)^3 \right\}
 \end{aligned}$$

と表される。これに t の値を代入すると

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{-\alpha + \beta}{2} \right)^3 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^3 \right\} \\
 &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{12}
 \end{aligned}$$

が得られる。

[IV]

[解答]

- (1) ナ $\angle ACD$
- (2) ニ $\angle ADC = \angle ACD$
- (3) ヌ $\angle DCB$
- (4) ネ $\angle C > \angle B$ ならば $AB > AC$
- (5) ノ $AB = AC$
- (6) ハ BE

(7) ヒ

$\triangle BCE$ に関して定理1を用いると

$$BE > BC$$

とわかるため、これと⑤より

$$AB + AC > BC$$

が導かれる。

〔V〕

〔解答〕

$$(1) \quad \frac{5}{4} \quad (2) \quad 2N-2$$

(3)

2つのルーレットを A, B と区別し、ルーレットの数を (A, B) と表す。 B が A より i 大きい場合は

$$(1, 1+i), (2, 2+i), \dots, (N-i, N)$$

の $N-i$ 通りある。また、 B が A より i 小さい場合は

$$(1+i, 1), (2+i, 2), \dots, (N, N-i)$$

の $N-i$ 通りある。以上より、2つの数字の差の絶対値が i となる組み合わせは

$$(N-i) + (N-i) = 2N-2i \quad (\text{通り})$$

となる。これより、差の絶対値が i となる確率 p_i は

$$p_i = \frac{2N-2i}{N^2}$$

となる。従って E_N は

$$\begin{aligned} E_N &= \sum_{i=0}^{N-1} i \cdot p_i \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} i \cdot \frac{2N-2i}{N^2} \\ &= \frac{2}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} (iN - i^2) \\ &= \frac{2}{N^2} \left\{ \frac{N^2(N-1)}{2} - \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \right\} \\ &= \frac{2}{N^2} \cdot \frac{N(N-1)(N+1)}{3} \\ &= \frac{N^2-1}{3N} \end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad E_N = \frac{N^2-1}{3N}$$

〔解説〕

(1)

$N=4$ のとき、 $N=3$ のときと同様に表をかくと下のようになる。

	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

従って、表より

$$\begin{aligned} E_4 &= \frac{20}{16} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。

(2)

2つのルーレットを A, B と区別し、ルーレットの数を (A, B) と表す。 B が A より1大きい場合は

$$(1, 2), (2, 3), \dots, (N-1, N)$$

の $N-1$ 通りある。また、 B が A より1小さい場合は

$$(2, 1), (3, 2), \dots, (N, N-1)$$

の $N-1$ 通りある。以上より、2つの数字の差の絶対値が1となる組み合わせは

$$(N-1) + (N-1) = 2N-2 \quad (\text{通り})$$

となる。