

【I】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ						
	1	1	2	5	6						
(2)	カ										
	6										
(3)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
	5	7	2	7	1	2	1	5	3	1	0

【解説】

(1)

製品 A の 3 つの部品のうち 2 つが低品質である確率は、

$${}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{21}{512}$$

であり、3 つが低品質である確率は、

$${}_3C_3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}$$

であるから、製品 A が不良品となる確率は、

$$\frac{21}{512} + \frac{1}{512} = \frac{11}{256}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_a^k (x^2 - a^2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - a^2 x \right]_a^k \\ &= \frac{2}{3} a^3 - ka^2 + \frac{k^3}{3} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} F'(a) &= 2a^2 - 2ka \\ &= 2a(a - k) \end{aligned}$$

であるから、 $k > 0$ より $F(a)$ の増減は次表のようになる。

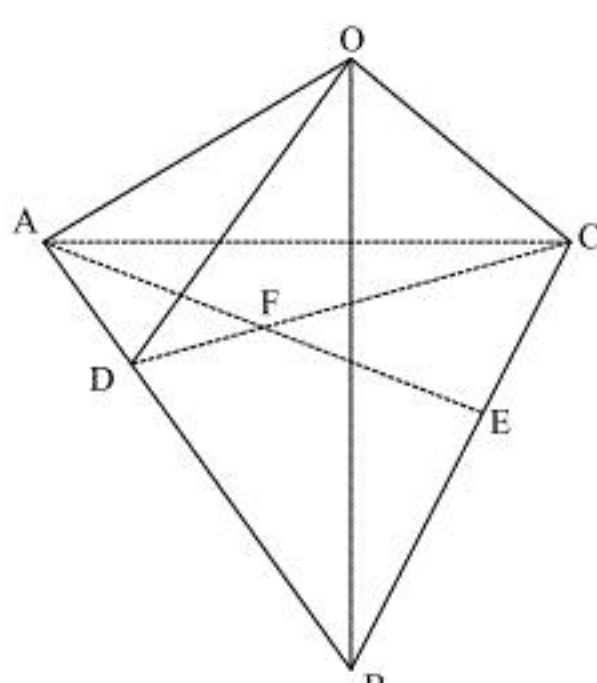
a	...	0	...	k	...
$F'(a)$	+	0	-	0	+
$F(a)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって関数 $F(a)$ の極値の差が 72 となるのは、

$$\begin{aligned} F(0) - F(k) &= 72 \\ \Leftrightarrow \frac{k^3}{3} - \left\{ \frac{2}{3} k^3 - k^3 + \frac{k^3}{3} \right\} &= 72 \\ \Leftrightarrow k^3 &= 216 \\ \therefore k &= 6 \end{aligned}$$

のときである。

(3)



条件より、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}|^2 &= 16 \\ |\overrightarrow{OB}|^2 &= 25 \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 4 \cdot 5 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 10 \end{aligned}$$

である。D は AB 上の点であるから、実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OD} = s\overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{OB}$$

と表せる。ここで、 $OD \perp AB$ より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (s\overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -s|\overrightarrow{OA}|^2 + \{s - (1-s)\}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + (1-s)|\overrightarrow{OB}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -16s + 10(2s - 1) + 25(1-s) &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{5}{7} \end{aligned}$$

であるから、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{5}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{7}\overrightarrow{OB}$$

となる。F は線分 CD 上の点であるから、実数 t を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= t\overrightarrow{OD} + (1-t)\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{5}{7}t\overrightarrow{OA} + \frac{2}{7}t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OC} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。また、E は辺 BC を 3:2 に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OC}$$

であり、また F は線分 AE 上の点であるから、実数 u を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= u\overrightarrow{OE} + (1-u)\overrightarrow{OA} \\ &= (1-u)\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}u\overrightarrow{OB} + \frac{3}{5}u\overrightarrow{OC} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ は一次独立であるから、①、②より

$$\begin{cases} \frac{5}{7}t = 1 - u \\ \frac{2}{7}t = \frac{2}{5}u \\ 1 - t = \frac{3}{5}u \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} t = \frac{7}{10} \\ u = \frac{1}{2} \end{cases}$$

となるので、①より

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{10}\overrightarrow{OC}$$

を得る。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
1	5	2	1	3	2

〔解説〕

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 2 \cdot 1 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 2a_2 + 2 \cdot 2 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

である。 $b_n = a_n + cn + d$ が $n = 1, 2, 3, \dots$ で与えられた漸化式を満たすのは,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2b_n \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + c(n+1) + d &= 2(a_n + cn + d) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 2a_n + cn + d - c \\ \Leftrightarrow 2a_n + 2n - 1 &= 2a_n + cn + d - c \\ \Leftrightarrow (2-c)n + c - d - 1 &= 0 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2-c=0 \\ c-d-1=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ d=1 \end{cases} \end{aligned}$$

となるときである。よって

$$b_n = a_n + 2n + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおくと、数列 $\{b_n\}$ は初項が

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + 2 \cdot 1 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

であり、公比が 2 の等比数列となるので、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

となる。よって①より、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= b_n - 2n - 1 \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - 2n - 1 \end{aligned}$$

と表せる。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ		
	0	1	4		
(2)	エ	オ	カ	キ	ク
	1	3	5	2	5
(3)	ケ	コ	サ		
	3	2	2		

【解説】

(1)

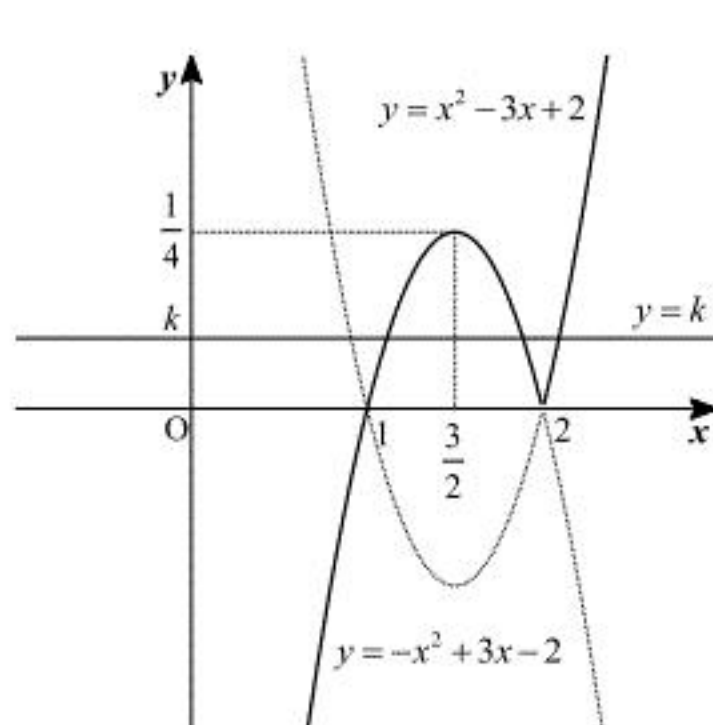
$x < 2$ のとき、

$$\begin{aligned}(x-1)|x-2| &= (x-1)(2-x) \\ &= -x^2 + 3x - 2 \\ &= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

であり、 $x \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}(x-1)|x-2| &= (x-1)(x-2) \\ &= x^2 - 3x + 2 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

であるから、 $y = (x-1)|x-2|$ のグラフは次図のようになる。

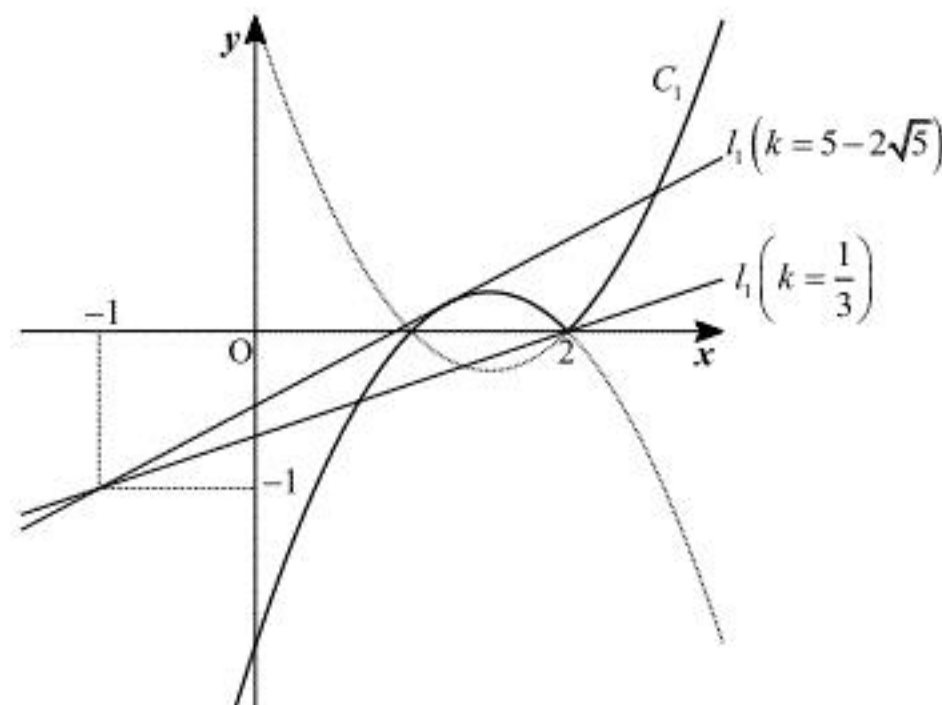


前図より、 $y = (x-1)|x-2|$ のグラフと $y = k$ のグラフが異なる3点で交わるような定数 k の値の範囲は、

$$0 < k < \frac{1}{4}$$

である。

(2)



$y = (x-1)|x-2|$ のグラフを C_1 、 $y = kx + k - 1$ のグラフを l_1 とおく。

$$kx + k - 1 = k(x+1) - 1$$

より、 l_1 のグラフは定点 $(-1, -1)$ を通り、傾きが k の直線である。2 次関数のグラフと直線の交点は高々 2 個であるから、 C_1 のグラフと l_1 のグラフが異なる 3 点で交わるのは、

l_1 と C_1 の $x < 2$ の部分が 1 点で交わり、 l_1 と C_1 の $x \geq 2$ の部分が 2 点で交わる場合

または、

l_1 と C_1 の $x < 2$ の部分が 2 点で交わり、 l_1 と C_1 の $x \geq 2$ の部分が 1 点で交わる場合

のいずれかである。ここで、 l_1 と C_1 の $x \geq 2$ の部分が 2 点で交わると仮定すると、2 次方程式

$$\begin{aligned}x^2 - 3x + 2 &= kx + k - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - (3+k)x + 3-k &= 0\end{aligned}$$

は 2 つの異なる実数解 α, β ($\alpha > \beta \geq 2$) をもつ。このとき解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = 3 + k, \alpha\beta = 3 - k$$

であり、 $\alpha > \beta \geq 2$ より

$$\alpha + \beta > 4 \text{ かつ } \alpha\beta > 4$$

であるから、

$$3 + k > 4 \text{ かつ } 3 - k > 4$$

となるが、これを満たす実数 k は存在しない。したがって、 l_1 と C_1 の $x \geq 2$ の部分が 2 点で交わることはない。ここで、 l_1 が点 $(2, 0)$ を通るのは

$$0 = 2k + k - 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

のときであるから、グラフより l_1 と C_1 の $x \geq 2$ の部分が 1 点で交わるような k の範囲は

$$k \geq \frac{1}{3}$$

とわかる。一方、 l_1 と C_1 の $x < 2$ の部分が 2 点で交わる時、2 次方程式

$$\begin{aligned}-x^2 + 3x - 2 &= kx + k - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + (k-3)x + k+1 &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

は $x < 2$ において異なる 2 つの実数解をもつ。したがって、①の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}D &> 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - 10k + 5 &> 0 \\ \Leftrightarrow k < 5 - 2\sqrt{5}, 5 + 2\sqrt{5} < k\end{aligned}$$

であり、グラフより、 $k > \frac{1}{3}$ であれば 2 つの交点はともに $x < 2$ の範囲にあることが分かる。以

上より、求める定数 k の範囲は

$$\frac{1}{3} < k < 5 - 2\sqrt{5}, 5 + 2\sqrt{5} < k$$

である。

(3)

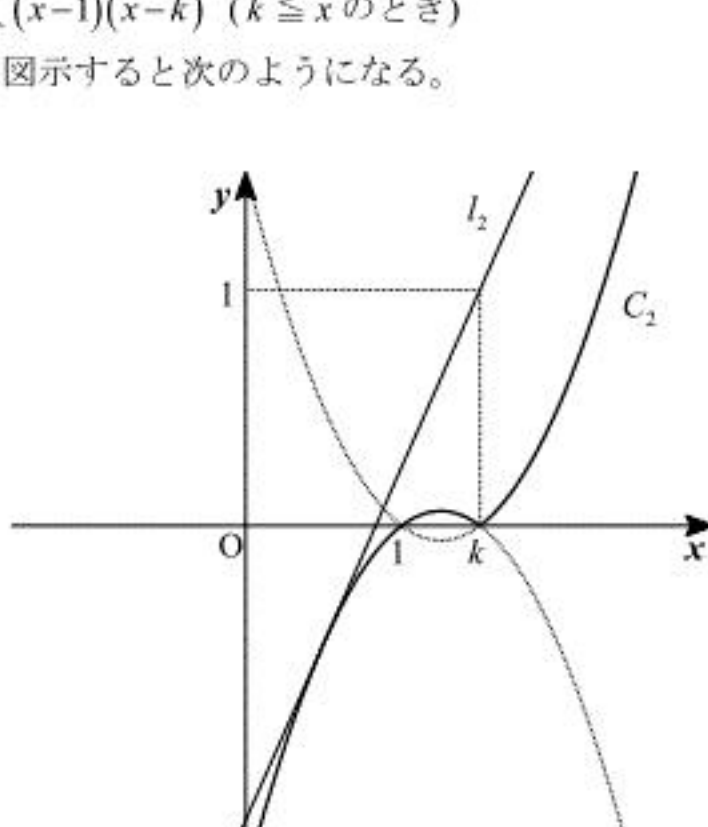
$y = (x-1)|x-k|$ のグラフを C_2 、 $y = kx - k^2 + 1$ のグラフを l_2 とおく。

$$k \cdot k - k^2 + 1 = 1$$

より、 l_2 は $(k, 1)$ を通る傾き k の直線であり、また

$$(x-1)|x-k| = \begin{cases} (x-1)(k-x) & (x < k \text{ のとき}) \\ (x-1)(x-k) & (k \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから、 C_2 と l_2 を図示すると次のようになる。



上図より、 C_2 と l_2 は $x > k$ において 1 点で交わるので、 C_2 と l_2 が異なる 3 点で交わる時、 $x < k$ において異なる 2 点で交わることが分かる。 $(k, 1)$ は曲線 $y = (x-1)(k-x)$ の上側にあり、

また l_2 の傾きは正であるから、 l_2 と曲線 $y = (x-1)(k-x)$ の交点は $x < k$ を満たす。よって、

$$\begin{aligned}(x-1)(k-x) &= kx - k^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - k^2 + k + 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が異なる 2 つの実数解をもつ k の範囲を求めればよい。ここで、②の判別式を D_1 とすると、

$$\begin{aligned}D_1 &> 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 4(-k^2 + k + 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow 4k^2 - 4k - 3 &> 0 \\ \Leftrightarrow (2k-3)(2k+1) &> 0 \\ \Leftrightarrow k < -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} < k\end{aligned}$$

であるから、 $k > 1$ とあわせて

$$\frac{3}{2} < k$$

のとき、 C_2 と l_2 は $x < k$ の範囲の 2 点、 $k < x$ の範囲の 1 点の計 3 点で交わる。また、このとき

$$\begin{aligned}(x-1)(k-x) &= kx - k^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - k^2 + k + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{4k^2 - 4k - 3}}{2} \\ (x-1)(x-k) &= kx - k^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - (2k+1)x + k^2 + k - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2k+1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1 - \sqrt{4k^2 - 4k - 3}}{2} \\ x_2 &= \frac{1 + \sqrt{4k^2 - 4k - 3}}{2} \\ x_3 &= \frac{2k+1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because x_3 > k)\end{aligned}$$

であるから、 $x_3 - x_2 = k$ となると、

$$\begin{aligned}x_3 - x_2 &= k \\ \Leftrightarrow \frac{2k+1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 + \sqrt{4k^2 - 4k - 3}}{2} &= k \\ \Leftrightarrow \sqrt{5} &= \sqrt{4k^2 - 4k - 3} \\ \Leftrightarrow 5 &= 4k^2 - 4k - 3 \quad (\because 4k^2 - 4k - 3 = D_1 > 0) \\ \Leftrightarrow k^2 - k - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-2)(k+1) &= 0 \\ \therefore k &= 2 \quad \left(\because k > \frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

である。