

【Ⅰ】

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
3	4	3	3	2	0	3	2

〔解説〕

直線 ℓ を表す方程式 $x+y=2+t$ を変形すると

$$y=-x+2+t$$

となる。これを、曲線 C を表す方程式 $xy=1+t$ に代入すると

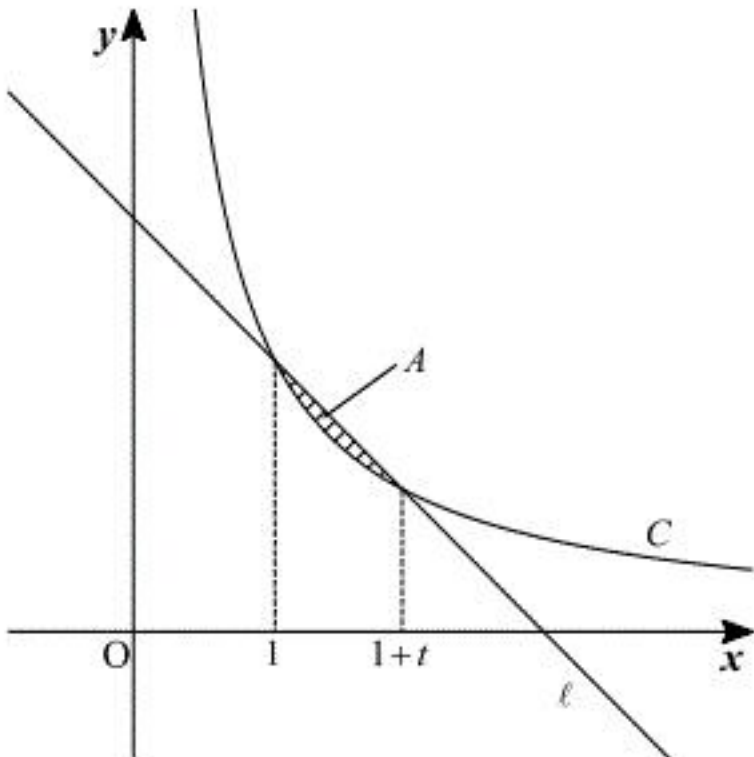
$$x(-x+2+t)=1+t$$

$$\Leftrightarrow x^2-(2+t)x+1+t=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\{x-(1+t)\}=0$$

$$\therefore x=1, 1+t$$

となることから、交点の x 座標は 1 と $1+t$ となる。よって、曲線 C と直線 ℓ に囲まれた図形 A を図示すると、以下の図のようになる。



したがって、図形 A の面積 $f(t)$ は

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_1^{1+t} \left\{ (-x+2+t) - \left(\frac{1+t}{x} \right) \right\} dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + (2+t)x - (1+t)\log x \right]_1^{1+t} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2}(1+t)^2 + (2+t)(1+t) - (1+t)\log(1+t) \right\} - \left\{ -\frac{1}{2} + (2+t) \right\} \\ &= \frac{t}{2}(2+t) - (1+t)\log(1+t) \end{aligned}$$

となる。また、図形 A を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 $g(t)$ は

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_1^{1+t} \pi \left\{ (-x+2+t)^2 - \left(\frac{1+t}{x} \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \left[-\frac{1}{3}(-x+2+t)^3 - (1+t)^2 \left(-\frac{1}{x} \right) \right]_1^{1+t} \\ &= \pi \left\{ -\frac{1}{3} + (1+t) \right\} - \pi \left\{ -\frac{1}{3}(1+t)^3 + (1+t)^2 \right\} \\ &= \frac{t^3}{3} \pi \end{aligned}$$

となる。よって、 $f(t)$, $g(t)$ の 2 階導関数を計算すると

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1+t - \log(1+t) - (1+t) \cdot \frac{1}{1+t} \\ &= t - \log(1+t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= 1 - \frac{1}{1+t} \\ &= \frac{t}{1+t} \end{aligned}$$

$$g'(t) = t^2 \pi$$

$$g''(t) = 2t \pi$$

となることから、求める極限值は

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{g''(t)}{f''(t)} &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{2t \pi}{\frac{t}{1+t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} 2(1+t) \pi \\ &= 2 \pi \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

☐ ア	☐ イ	☐ ウ	☐ エ	☐ オ	☐ カ
1	1	2	0	1	4

〔解説〕

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} &= 1 \text{ より} \\ \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin(\pi x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x(x-1)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}{(\pi x(x-1))^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x(x-1)\right)}{\frac{\pi}{2}x(x-1)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \cdot \frac{\pi x \cdot \frac{\pi}{2}x(x-1)}{(\pi x(x-1))^2} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。また、 $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(0) = a$ であるから、関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるならば

$$a = \frac{1}{2}$$

となる。関数 $f(x)$ が $x=1$ で微分可能となる必要十分条件は

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1) \quad \text{かつ} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

となることである。ここで

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\sin(\pi x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x(x-1)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}{(\pi x(x-1))^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \sin(\pi x) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x(x-1)\right)}{\frac{\pi}{2}x(x-1)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}{\frac{\pi}{2}(x-1)} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}x(x-1) \cdot \frac{\pi}{2}(x-1)}{(\pi x(x-1))^2} \\ &= 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) &= f(1) = b\end{aligned}$$

となることから

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1) \\ \Leftrightarrow b &= 0\end{aligned}$$

となる。したがって、 $x \geq 1$ のとき

$$f(x) = -c\pi(x-1)$$

となる。このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\sin(\pi x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x(x-1)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}{\pi^2 x^2 (x-1)^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-\sin(\pi(x-1))}{-\pi(x-1)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x(x-1)\right)}{\frac{\pi}{2}x(x-1)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}{\frac{\pi}{2}(x-1)} \cdot \frac{-\pi(x-1) \cdot \frac{\pi}{2}x(x-1) \cdot \frac{\pi}{2}(x-1)}{\pi^2 x^2 (x-1)^3} \\ &\quad \left(\because \sin(\pi + \pi(x-1)) = -\sin(\pi(x-1))\right) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{\pi}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{-c\pi(x-1)}{x-1} \\ &= -c\pi\end{aligned}$$

となることから

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \\ \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} &= -c\pi \\ \Leftrightarrow c &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
0	3	1	3	1	2
キ	ク	ケ	コ	サ	シ
1	4	4	1	1	2

〔解説〕

a, b は正の実数であるから、楕円 $E: \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ は θ を媒介変数として

$$x = \sqrt{a} \cos \theta, \quad y = \sqrt{b} \sin \theta \quad \cdots \text{①}$$

と媒介変数表示できる。よって、楕円 E が領域 D に含まれるための必要十分条件は、領域 D を表す不等式 $y \geq x^2 - 1$ に代入することで

$$\sqrt{b} \sin \theta \geq (\sqrt{a} \cos \theta)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{b} \sin \theta \geq a(1 - \sin^2 \theta) - 1$$

$$\Leftrightarrow a \sin^2 \theta + \sqrt{b} \sin \theta + 1 - a \geq 0$$

となる。そこで、 $f(x) = ax^2 + \sqrt{b}x + 1 - a$ とおき

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ のときに } f(x) \geq 0 \text{ となる} \quad \cdots \text{②}$$

条件を求める。ここで、2 次関数 $f(x)$ を平方完成すると

$$f(x) = a \left(x + \frac{\sqrt{b}}{2a} \right)^2 + 1 - a - \frac{b}{4a}$$

となるから、放物線 $y = f(x)$ の軸を表す直線 $x = c$ の c の値は

$$c = -\frac{\sqrt{b}}{2a}$$

となる。 $c \leq -1$ すなわち $b \geq 4a^2$ のとき、②をみたすための必要十分条件は $f(-1) \geq 0$ であるから、これを整理すると

$$f(-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \cdot (-1)^2 + \sqrt{b} \cdot (-1) + 1 - a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{b} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow b \leq 1$$

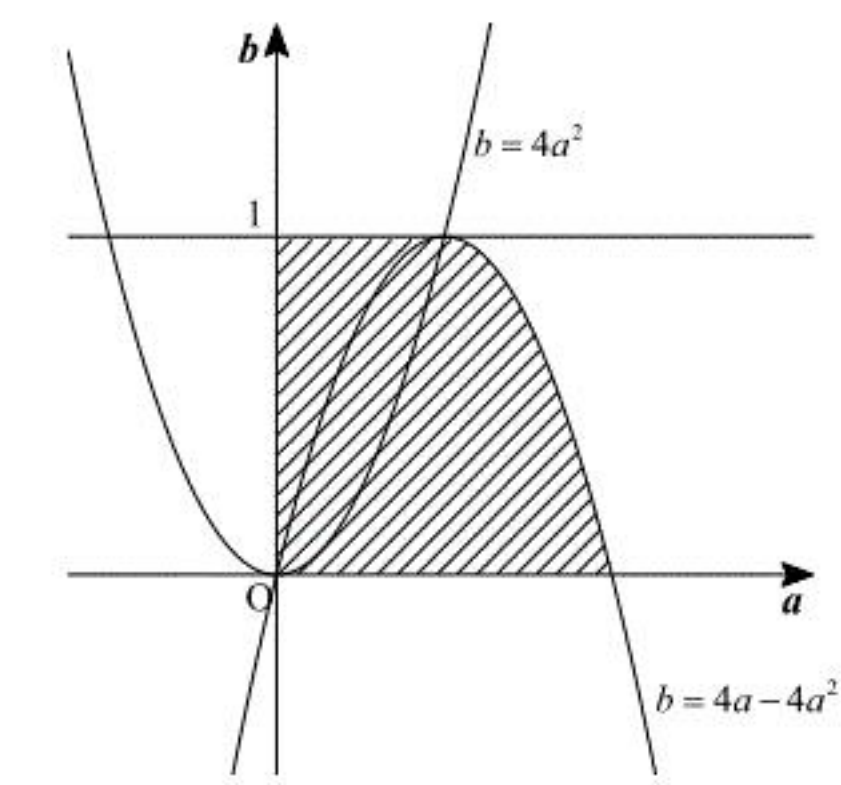
となる。また、 $c > -1$ すなわち $b < 4a^2$ のとき、②をみたすための必要十分条件は $f(x) = 0$ の判別式 D が 0 以下となることであるから、これを整理すると

$$D \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{b})^2 - 4a(1 - a) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow b \leq 4a - 4a^2$$

となる。これらを $a > 0, b > 0$ に注意して ab 平面上に図示すると、以下の図のようになる。ただし、境界は a 軸上、 b 軸上以外を含む。



$a \geq \frac{1}{2}$ の範囲で $b = 4a - 4a^2$ を a について解くと

$$4a^2 - 4a + b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1 + \sqrt{1 - b}}{2} \quad (\because a \geq \frac{1}{2})$$

となるので、上図より、楕円 E が領域 D に含まれるための必要十分条件は

$$0 < b \leq 1 \quad \text{かつ} \quad 0 < a \leq \frac{1 + \sqrt{1 - b}}{2}$$

となる。

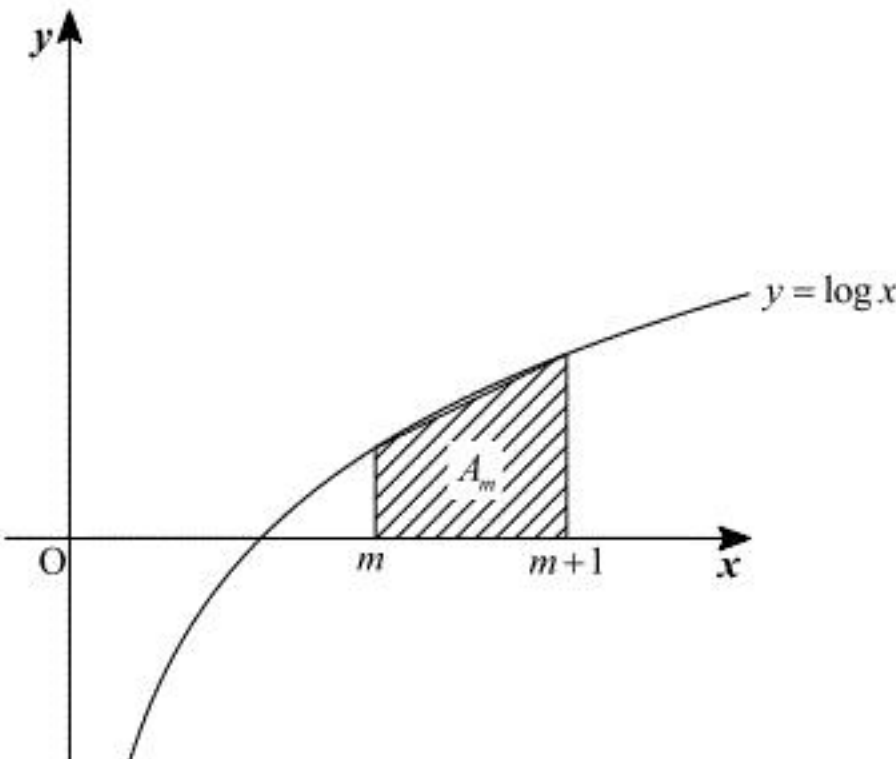
【Ⅳ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ						
	1	2	2						
(2)	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	1	8	3	1	2	2	1	8	0
(3)	ス	セ	ソ	タ	チ				
	7	2	5	6	8				

【解説】

(1)



4 点 $(m, 0), (m+1, 0), (m+1, \log(m+1)), (m, \log m)$ を頂点とする台形の面積 A_m は

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \{\log m + \log(m+1)\} \\ &= \frac{\log m + \log(m+1)}{2} \end{aligned}$$

である。したがって、 $n \geq 4$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log 2 + \sum_{m=2}^{n-1} A_m &= \frac{1}{2} \log 2 + \sum_{m=2}^{n-1} \frac{\log m + \log(m+1)}{2} \\ &= \log 2 + \log 3 + \cdots + \log(n-1) + \frac{1}{2} \log n \\ &= \log(n!) - \frac{1}{2} \log n \end{aligned}$$

である。

(2)

$y = \log x$ の導関数は $y' = \frac{1}{x}$ であるから、点 $(k, \log k)$ における $y = \log x$ の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - \log k &= \frac{1}{k}(x - k) \\ \therefore y &= \frac{1}{k}x + \log k - 1 \end{aligned}$$

となる。したがって、関数 $f_k(x)$ は

$$f_k(x) = \frac{1}{k}x + \log k - 1$$

であるから、定積分 B, C, D の値はそれぞれ

$$\begin{aligned} B &= \int_1^{\frac{3}{2}} f_1(x) dx \\ &= \int_1^{\frac{3}{2}} (x - 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[(x - 1)^2 \right]_1^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_m &= \int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} f_m(x) dx \\ &= \int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{m}x + \log m - 1 \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2m} + (\log m - 1)x \right]_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ \left(m + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(m - \frac{1}{2} \right)^2 \right\} + (\log m - 1) \left\{ \left(m + \frac{1}{2} \right) - \left(m - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \log m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \int_{n-\frac{1}{2}}^n f_n(x) dx \\ &= \int_{n-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{1}{n}x + \log n - 1 \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2n} + (\log n - 1)x \right]_{n-\frac{1}{2}}^n \\ &= \frac{1}{2n} \left\{ n^2 - \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \right\} + (\log n - 1) \left\{ n - \left(n - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \log n - \frac{1}{8n} \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

定積分 $\int_1^n \log x dx$ の値は

$$\begin{aligned} \int_1^n \log x dx &= \left[x \cdot \log x \right]_1^n - \int_1^n x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= n \log n - \left[x \right]_1^n \\ &= n(\log n - 1) + 1 \end{aligned}$$

と計算できる。不等式

$$\frac{1}{2} \log 2 + \sum_{m=2}^{n-1} A_m \leq \int_1^n \log x dx \leq B + \sum_{m=2}^{n-1} C_m + D \quad \cdots \textcircled{1}$$

について、(2)より、最右辺は、

$$\begin{aligned} B + \sum_{m=2}^{n-1} C_m + D &= \frac{1}{8} + \sum_{m=2}^{n-1} \log m + \frac{1}{2} \log n - \frac{1}{8n} \\ &= \frac{1}{8} + \log \{(n-1)!\} + \frac{1}{2} \log n - \frac{1}{8n} \\ &= \frac{1}{8} + \log(n!) - \frac{1}{2} \log n - \frac{1}{8n} \\ &\leq \frac{1}{8} + \log(n!) - \frac{1}{2} \log n \end{aligned}$$

となる。(1)も合わせると、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} \log(n!) - \frac{1}{2} \log n &\leq n(\log n - 1) + 1 \leq \frac{1}{8} + \log(n!) - \frac{1}{2} \log n \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{7}{8} + \frac{1}{2} \log n + n(\log n - 1)}{\log 10} &\leq \log_{10}(n!) \leq \frac{1 + \frac{1}{2} \log n + n(\log n - 1)}{\log 10} \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $n = 1000$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\frac{7}{8} + \frac{1}{2} \cdot 3 \log 10 + 1000(3 \log 10 - 1)}{\log 10} &\leq \log_{10}(1000!) \leq \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \log 10 + 1000(3 \log 10 - 1)}{\log 10} \\ \Leftrightarrow 3000 + \frac{3}{2} - \frac{1000 - \frac{7}{8}}{\log 10} &\leq \log_{10}(1000!) \leq 3000 + \frac{3}{2} - \frac{1000 - 1}{\log 10} \\ \Leftrightarrow 3000 + \frac{3}{2} - \left(1000 - \frac{7}{8} \right) \cdot 0.4343 &\leq \log_{10}(1000!) \leq 3000 + \frac{3}{2} - (1000 - 1) \cdot 0.4343 \\ \Leftrightarrow 2567.5 \cdots &\leq \log_{10}(1000!) \leq 2567.6 \cdots \end{aligned}$$

となる。したがって、 $1000!$ の桁数は 2568 となることがわかる。