

〔I〕

〔解答〕

(1)		ア	イ			
		②	②			
(2)		ウ	エ	オ		
		2	5	6		
(3)	(a)	カ	キ	ク		
		5	1	6		
	(b)	ケ	コ	サ	シ	ス
		2	3	1	2	8

〔解説〕

(1)

$f(x) = x^2 \log x$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= x(2 \log x + 1) \end{aligned}$$

となるので、 $x > 0$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			最小	

したがって、 $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ のとき最小値

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) &= \frac{1}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2e} \end{aligned}$$

をとる。

(2)

3^{52} の常用対数をとると

$$\log_{10} 3^{52} = 52 \log_{10} 3 = 52 \cdot 0.4771 = 24.8092$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \log_{10} 6 \times 10^{24} (= 24.7781) &< \log_{10} 3^{52} (= 24.8092) < \log_{10} 7 \cdot 10^{24} (= 24.8451) \\ \therefore 6 \times 10^{24} &< 3^{52} < 7 \times 10^{24} \end{aligned}$$

となるから、 3^{52} の桁数は 25 であり、最高位の数字は 6 であることがわかる。

(3)(a)

コイン投げを行って B 地点に到達するのは表が少なくとも 3 回、裏が少なくとも 3 回出たときである。したがって、コイン投げを 6 回行った結果、ちょうど B 地点に到達するのは、表と裏が 3 回ずつ出る場合であり、その確率は

$$\frac{{}_6C_3}{2^6} = \frac{5}{16}$$

である。

(b)

コイン投げを 9 回行っても B 地点に到達できないのは、表が 2 回以下しか出ないとき、または裏が 2 回以下しか出ないときである。よって、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_7 + {}_9C_8 + {}_9C_9}{2^9} &= \frac{1 + 9 + 36 + 36 + 9 + 1}{512} \\ &= \frac{23}{128} \end{aligned}$$

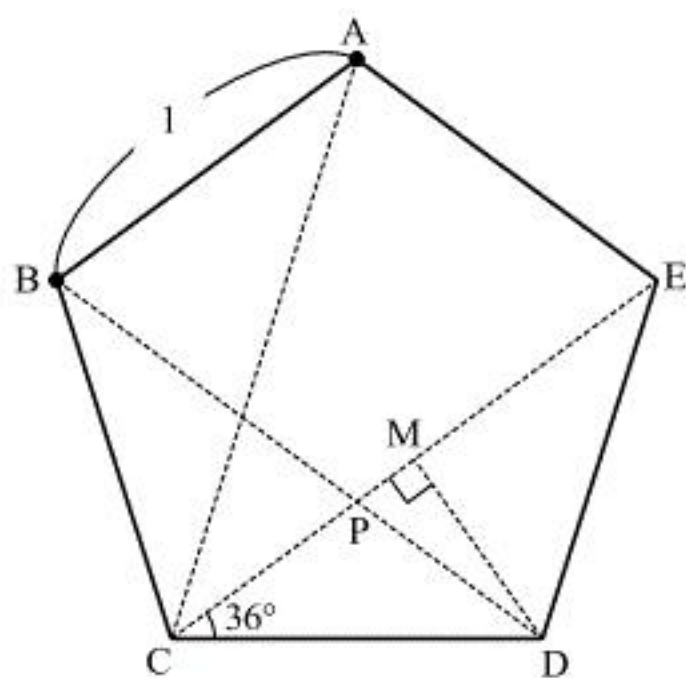
である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

あ	い	う	え	お
$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	1	1	1

〔解説〕



辺 CE の中点を M とすると、正五角形の対称性より $\angle CMD = 90^\circ$ であるから

$$\begin{aligned} CE &= 2CM \\ &= 2CD \cos 36^\circ \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{aligned}$$

である。ここで、 $\overline{EC} \parallel \overline{AB}$ であることから $\overline{EC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \overline{AB}$ となるため、 $\overline{AC}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すとき

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{AE} + \overline{EC} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

である。また、辺 AB と辺 EP 、辺 AE と辺 BP はそれぞれ平行であるため、四角形 $ABPE$ は平行四辺形となるから、 $\overline{BP} = \overline{AE}$ となり、 $\overline{AP}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すとき

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \overline{AB} + \overline{BP} \\ &= \overline{AB} + \overline{AE} \\ &= \vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

(1)

28 の正の約数の中で 28 以外のものをすべて書き上げると

$$1, 2, 4, 7, 14$$

である。これらの和は

$$1+2+4+7+14=28$$

であるから、28 は完全数である。

(答) 1, 2, 4, 7, 14

(2)

p が 2 でない素数であるとき、 $2^{n-1}p$ の正の約数は

$$2^{k-1} \text{ または } 2^{k-1}p \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

と表される。したがって、 $2^{n-1}p$ のすべての正の約数の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2^{k-1} + 2^{k-1}p) &= (p+1) \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \\ &= (p+1)(2^n - 1) \end{aligned}$$

である。

(答) $(p+1)(2^n - 1)$

(3)

$2^n - 1$ が素数であるとき、これは 2 でないから、(2)において $p = 2^n - 1$ とすると、 $2^{n-1}(2^n - 1)$ のすべての正の約数の和は

$$(p+1)(2^n - 1) = 2^n(2^n - 1)$$

である。したがって、 $2^{n-1}(2^n - 1)$ の正の約数の中で $2^{n-1}(2^n - 1)$ 以外のものの和は

$$\begin{aligned} 2^n(2^n - 1) - 2^{n-1}(2^n - 1) &= (2^n - 2^{n-1}) \cdot (2^n - 1) \\ &= 2^{n-1}(2^n - 1) \end{aligned}$$

であるから、 $2^{n-1}(2^n - 1)$ は完全数である。

(証明終)

(4)

a が偶数で完全数であるとき、2 以上の自然数 n と奇数 b を用いて、 a は

$$a = 2^{n-1}b$$

と表せる。ここで a, b のすべての正の約数の和をそれぞれ $S(a), S(b)$ とすると、2 と b が互いに素であることから

$$S(a) = (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1})S(b)$$

$$\therefore S(a) = (2^n - 1)S(b) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。一方、 a が完全数であることから

$$S(a) = a + a = 2^n b \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。よって、②を①に代入することで

$$2^n b = (2^n - 1)S(b)$$

となり、また、 2^n と $2^n - 1$ が互いに素であることから、 $b, S(b)$ はある奇数 m を用いて

$$\begin{cases} b = (2^n - 1)m \\ S(b) = 2^n m \end{cases}$$

と表せることがわかる。ここで $m \geq 3$ と仮定すると、 $n \geq 2$ であることから b は相異なる約数 $(2^n - 1)m, m, 1$ を持つため、 $S(b)$ について

$$S(b) \geq (2^n - 1)m + m + 1$$

$$\Leftrightarrow 2^n m \geq 2^n m + 1$$

となり矛盾する。したがって $m = 1$ であり、このとき $b = 2^n - 1$ となることから、 a は

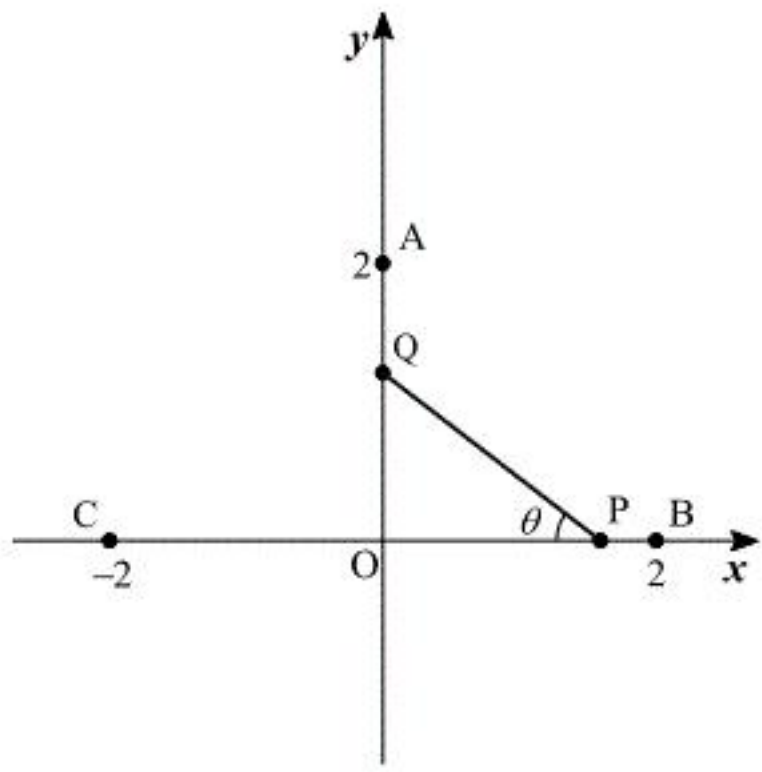
$$a = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

と表されるため、題意が示された。

(証明終)

〔Ⅳ〕

(1)



$\angle QPC = \theta$ より、直線 PQ の傾きは

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

である。また、 $PQ = 2$ より直線 PQ の y 切片は

$$OQ = 2 \sin \theta$$

である。

(答) 直線 PQ の傾き: $-\tan \theta$, y 切片: $2 \sin \theta$

(2)

P が A から $(k, 0)$ まで動くときの θ の範囲は、 $k = 2 \cos \theta$ および $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ を β とすると、

$$0 \leq \theta \leq \beta$$

である。(1)より、直線 PQ の方程式は

$$y = (-\tan \theta)x + 2 \sin \theta$$

であるから、R の y 座標 $y_R(\theta)$ は

$$y_R(\theta) = -k \tan \theta + 2 \sin \theta$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} y_R'(\theta) &= -\frac{k}{\cos^2 \theta} + 2 \cos \theta \\ &= \frac{2 \cos^3 \theta - k}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

であるから、 $2 \cos^3 \theta - k = 0$ および $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数を α' とすると、 $0 \leq \theta \leq \beta$ における $y_R(\theta)$ の増減表は以下のようになる。ただし、 $0 < k < 2$ のもとで

$$\begin{aligned} 2 \cos^3 \alpha' - k &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \alpha' &= \sqrt[3]{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} k &= 2 \cos^3 \beta \\ \Leftrightarrow \cos \beta &= \frac{k}{2} \end{aligned}$$

かつ $0 < \alpha', \beta < \frac{\pi}{2}$ であることから、 $\alpha' < \beta$ であることに注意する。

θ	0	...	α'	...	β
$y_R'(\theta)$		+	0	-	
$y_R(\theta)$	0	↗	最大	↘	0

したがって、 $\alpha = \alpha'$ となるから、 k と α の間で成り立つ関係式は

$$\begin{aligned} 2 \cos^3 \alpha - k &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= 2 \cos^3 \alpha \end{aligned}$$

である。また、 $y_R(\theta)$ の最大値は

$$\begin{aligned} y_R(\alpha) &= -k \tan \alpha + 2 \sin \alpha \\ &= -2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \\ &= 2 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

である。

(答) k と α の間で成り立つ関係式: $k = 2 \cos^3 \alpha$, 最大値: $2 \sin^3 \alpha$

(3)

$$\begin{aligned} k &= 2 \cos^3 \alpha \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

であるから、 $y_R(\theta)$ の最大値 $2 \sin^3 \alpha$ は k を用いて

$$\begin{aligned} 2 \sin^3 \alpha &= 2(1 - \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}} \\ &= 2 \left\{ 1 - \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $f(x)$ は

$$f(x) = 2 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}}$$

である。

(答) $f(x) = 2 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}}$

(4)

領域 D の面積 S は

$$\int_0^2 f(x) dx$$

と表されるため、 $x = 2 \cos^3 \alpha$ において置換すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \sin^3 \alpha \\ dx &= -6 \sin \alpha \cos^2 \alpha \cdot d\alpha \end{aligned}$$

x	0	→	2
α	$\frac{\pi}{2}$	→	0

であることから、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 2 \sin^3 \alpha dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2 \sin^3 \alpha \cdot (-6 \sin \alpha \cos^2 \alpha) d\alpha \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha \end{aligned}$$

となる。ここで、被積分関数について

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha &= \sin^2 \alpha \cdot (\sin \alpha \cos \alpha)^2 \\ &= \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \\ &= \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1 - \cos 4\alpha}{8} \\ &= \frac{1}{16} (\cos 4\alpha \cos 2\alpha - \cos 4\alpha - \cos 2\alpha + 1) \\ &= \frac{1}{16} \left\{ \frac{1}{2} (\cos 6\alpha + \cos 2\alpha) - \cos 4\alpha - \cos 2\alpha + 1 \right\} \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} \cos 6\alpha - \cos 4\alpha - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + 1 \right) \end{aligned}$$

と変形できることに注意すれば、 S の値は

$$\begin{aligned} S &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} \cos 6\alpha - \cos 4\alpha - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + 1 \right) d\alpha \\ &= \frac{3}{4} \left[\frac{1}{12} \sin 6\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha - \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{8} \pi \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{3}{8} \pi$