

に

数 学 問 題

はじめに、これを読みなさい。

1. この問題用紙は9ページある。ただし、ページ番号のない白紙はページ数に含まない。白紙は計算用紙として使用してよい。
2. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認すること。
3. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
4. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークするか、または記入すること。所定欄以外のところには何も記入しないこと。
5. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
6. 解答は、鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入のこと。
7. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
8. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
9. 問題は〔Ⅰ〕～〔Ⅴ〕まで5問ある。〔Ⅰ〕,〔Ⅱ〕は必ず解答すること。〔Ⅲ〕,〔Ⅳ〕,〔Ⅴ〕はいずれか2問を選択して解答すること。
10. 解答用紙はすべて回収する。持ち帰らず、必ず提出すること。ただし、この問題用紙は、必ず持ち帰ること。
11. 試験時間は60分である。
12. マーク記入例

良い例	悪い例
	

[I] (1)~(5)において、**(A)**, **(B)**, **(C)**の値の大小関係を調べ、最大のものと最小のものを、それぞれ所定の解答欄(表面)にマークせよ。

(1) **(A)** $\log_2 3$ **(B)** $\log_3 2$ **(C)** $\frac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_2 \sqrt{2}}$

(2) $a > 0, b > 0, c > 0$ であり、
 $c^2 - ab - bc + ac > 0$ かつ $ab + bc - a^2 - ac > 0$ であるとき、
(A) a **(B)** b **(C)** c

(3) ある等比数列の第4項から初項を引いた値は14、第5項から第2項を引いた値は7である。この等比数列について、
(A) 初項 **(B)** 公比 **(C)** 第3項

(4) 空間上に $P(0, 1, 0)$ と $Q(1, 2, 3)$ があり、直線 PQ と平面 $y = -1$ の交点を R とする。
(A) R の x 座標 **(B)** R の y 座標 **(C)** R の z 座標

(5) 2つの0でない実数 m, n に関する次の4つの条件

- m は負、または、 n は負である
- m は正、または、 n は正である
- m, n はともに負である
- m, n はともに正である

のうち

- (A)** 「 $m + n < 0$ 」であるための必要条件にあたる条件の個数
(B) 「 $\frac{m}{n} < 0$ 」であるための十分条件にあたる条件の個数
(C) 「 $mn > 0$ 」であるための十分条件にあたる条件の個数

(このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。)

〔Ⅱ〕 所定の解答欄(表面)に、解答をマークせよ。

なお、問題文中の アイ , ウエ は答が2ケタであることを表しており、ア～エの部分には数字(0～9)が入る。オ ～ ク は答が符号付き1ケタであることを表しており、答の数字をマークするとともに、答が正または0の場合は $\oplus$ を、負の場合は $\ominus$ をマークすること。

- (1) $\triangle ABC$ の面積は72であり、辺 AB , BC , CA の比が $7:6:5$ である。

$\triangle ABC$ の内心を I , 直線 AI と辺 BC の交点を D とするとき、 $\triangle CAD$ の面積は

アイ , $\triangle IAB$ の面積は ウエ である。

- (2) 関数 $f(x) = x^3 - x^2 - 21x + 25$ が単調減少する区間を $a \leq x \leq b$ と表す。

a , b が整数であるとする、 a がとりうる最小の値は オ , b がとりうる最大の値は カ である。

- (3) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ であることが知られている。これを利用すると、

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} = \text{ キ }$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\alpha \sin \alpha} = \text{ ク }$$

と求められる。

(このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。)

〔Ⅲ〕, 〔Ⅳ〕, 〔Ⅴ〕のうち2問を選択して解答せよ。(なお3問すべてに解答した場合は、高得点の2問を合計得点に含める。)

〔Ⅲ〕 所定の解答欄(表面)に、次の各問の答のみを記せ。

なお、問題文中に空欄 , などが2度以上現れる場合、2度目以降は、 , のように細字で表記している。

2つの曲線 $C_1: y = x^2 + px + q$, $C_2: y = x^2 + rx + s$ があり、直線 l が C_1 と C_2 のいずれにも接している。ただし、 p, q, r, s は実数で、 $p \neq r$ とする。

C_1 と l の接点の x 座標を α , C_2 と l の接点の x 座標を β とするとき、 $\alpha < \beta$ であるとする。

- (1) C_1 と C_2 の交点の x 座標を t とする。 t を α と β で表す式を求める過程を記した次の文章の空欄 ~ に適切な式を入れよ。

まず、 C_1, C_2 の接線の方程式を求める。

$$C_1: y = x^2 + px + q \quad \text{①}$$

$$C_2: y = x^2 + rx + s \quad \text{②}$$

①より、 C_1 上の点 $(\alpha, \alpha^2 + p\alpha + q)$ における接線の方程式は、

$$y - (\alpha^2 + p\alpha + q) = \left(\text{サ} \right) (x - \alpha)$$

これを整理して、

$$y = \left(\text{サ} \right) x + \left(\text{シ} \right) \quad \text{③}$$

同様に②より、 C_2 上の点 $(\beta, \beta^2 + r\beta + s)$ における接線の方程式は、

$$y - (\beta^2 + r\beta + s) = \left(\text{ス} \right) (x - \beta)$$

これを整理して、

$$y = \left(\text{ス} \right) x + \left(\text{セ} \right) \quad \text{④}$$

次に直線 l を考える。直線 l は③, ④が同一の式となる場合の直線である。よって、③, ④より、

$$\text{サ} = \text{ス} \quad \text{⑤}$$

$$\text{かつ } \boxed{\text{シ}} = \boxed{\text{セ}} \quad (6)$$

⑤, ⑥を整理すると,

$$p - r = \boxed{\text{ソ}} \quad (7)$$

$$q - s = \boxed{\text{タ}} \quad (8)$$

C_1 と C_2 の交点の x 座標 t は, ①, ②より,

$$t^2 + pt + q = t^2 + rt + s$$

の解で, $p \neq r$ だから,

$$t = \frac{s - q}{p - r} \quad (9)$$

⑨に⑦, ⑧を代入し,

$$t = \boxed{\text{チ}} \quad (10)$$

(2) C_1 と C_2 と l で囲まれた部分の面積 S を α と β で表す式を求める過程を記した次の文章の空欄 $\boxed{\text{ツ}}$ $\sim$ $\boxed{\text{ト}}$ に適切な式を入れよ。

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^t \left| (x^2 + px + q) - \left\{ \left(\boxed{\text{サ}} \right) x + \left(\boxed{\text{シ}} \right) \right\} \right| dx \\ &\quad + \int_t^{\beta} \left| (x^2 + rx + s) - \left\{ \left(\boxed{\text{ス}} \right) x + \left(\boxed{\text{セ}} \right) \right\} \right| dx \\ &= \int_{\alpha}^t \left(\boxed{\text{ツ}} \right)^2 dx + \int_t^{\beta} \left(\boxed{\text{テ}} \right)^2 dx \end{aligned}$$

⑩の t の値を代入し, 整理すると,

$$S = \boxed{\text{ト}}$$

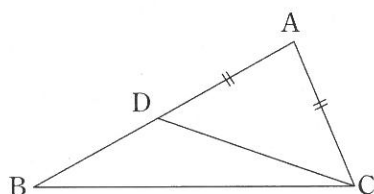
〔Ⅲ〕, 〔Ⅳ〕, 〔Ⅴ〕のうち 2 問を選択して解答せよ。(なお 3 問すべてに解答した場合は, 高得点の 2 問を合計得点に含める。)

〔Ⅳ〕 所定の解答欄(裏面)に, (1)~(6)については答のみを, (7)については証明を記せ。

△ABC に関する次の定理 1 と定理 2 を証明したい。

定理 1 $AB > AC$ と $\angle C > \angle B$ は, たがいに同値である

定理 2 $AB + AC > BC$



〔証明 1 - 1〕

定理 1 のうち, 「 $AB > AC$ ならば $\angle C > \angle B$ 」を証明する。

半直線 AB 上に, $AD = AC$ となるように点 D をとれば, $AB > AD$ であるから, D は線分 AB 上に位置する。したがって,

$$\angle ACB > \boxed{\text{ナ}} \quad \text{①}$$

$AD = AC$ であるから

$$\boxed{\text{ニ}} \quad \text{②}$$

△DBC の外角 $\angle ADC = \angle B + \boxed{\text{ヌ}}$ であるから,

$$\angle ADC > \angle B \quad \text{③}$$

①, ②, ③から, $\angle C = \angle ACB > \angle ACD > \angle B$

[証明 1 - 2]

次に, 「 $AB > AC$ ならば $\angle C > \angle B$ 」の逆である

ネ

④

を背理法を用いて証明する。

もし, $\angle C > \angle B$ であるにもかかわらず, $AB < AC$ であるならば, 証明 1 - 1 により $\angle C < \angle B$ であり, また, もし であるならば, 明らかに $\angle C = \angle B$ である。いずれも $\angle C > \angle B$ であることに矛盾する。したがって, ④が成立し, 証明 1 - 1 の結果と合わせて, 定理 1 が証明された。

[証明 2]

定理 2 を証明する。

線分 BA の延長上に, $AE = AC$ となる点 E をとると,

$$AB + AC = BA + AE = \text{ハ}$$

⑤

$AE = AC$ であるから, $\angle ACE = \angle AEC$ であり, また明らかに, $\angle BCE > \angle ACE = \angle BEC$ である。

ヒ

- (1) 空欄 に当てはまる適切な角を解答欄に記せ。
- (2) 空欄 に当てはまる適切な角に関する等式を解答欄に記せ。
- (3) 空欄 に当てはまる適切な角を解答欄に記せ。
- (4) 空欄 に当てはまる適切な命題を解答欄に記せ。
- (5) 空欄 に当てはまる適切な式を解答欄に記せ。
- (6) 空欄 に当てはまる適切な辺を解答欄に記せ。
- (7) 空欄 に当てはまる, [証明 2] の証明の残りの部分を解答欄に記せ。

〔Ⅲ〕, 〔Ⅳ〕, 〔Ⅴ〕のうち2問を選択して解答せよ。(なお3問すべてに解答した場合は、高得点の2問を合計得点に含める。)

〔Ⅴ〕 所定の解答欄(裏面)に、(1), (2)については答のみを、(3)については解答経過と答をともに記せ。

1から N (N は1より大きい整数)までのすべての整数が書かれたルーレットがあり、どの数字も同じ確率 $\frac{1}{N}$ で出るものとする。このルーレットを2つ同時に回したときに出了た数字の差の絶対値の平均的な値を E_N とする。この E_N は、差の絶対値を i 、差の絶対値が i となる確率を p_i と表すと、

$$E_N = \sum_{i=0}^{N-1} i \cdot p_i$$

で求められるとする。たとえば $N=3$ のときは、次の表から、 $E_3 = \frac{8}{9}$ と求められる。

	1	2	3
1	0	1	2
2	1	0	1
3	2	1	0

- (1) E_4 を求めよ。
- (2) ルーレットの数字の最大値が N のルーレットを2つ同時に回して出了た数字の差の絶対値が1となる組み合わせは何通りあるか、 N を用いた式で表せ。
- (3) E_N を N を用いた式で表せ。

なお、 $\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1)$ である。

(以上問題終)