

国語，数学Ⅲ 問題

はじめに，これを読みなさい。

1. 解答用紙には，あなたの受験番号が印刷されています。受験番号が正しいかどうか，受験票と照合して確認し，氏名を記入しなさい。
2. 「国語」の問題は裏面から始まります。
3. この問題冊子は，「数学Ⅲ」については表面から8ページ，「国語」については裏面から18ページあります(表紙の次の白紙2ページはメモ用紙として使用してかまいません)。必要な科目を選択して解答しなさい。
4. 解答用紙の「解答科目マーク欄」にマークし，「解答科目名記入欄」に解答する科目名を記入しなさい。マークされていない場合，又は複数の科目にマークされている場合は，この時限の科目は採点対象外となります。
5. 解答は，すべて解答用紙の解答欄にマークしなさい。
6. 1つの解答欄に2つ以上マークしてはいけません。
7. 解答は，必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
8. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないようにしなさい。
9. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしてはいけません。
10. 解答用紙は持ち帰らないで，必ず提出しなさい。
11. この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
12. 試験時間は60分です。
13. (数学Ⅲ) 分数形で解答する場合は，既約分数で答えなさい。
14. (数学Ⅲ) 根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
15. マーク記入例

良い例	悪い例
	  

(このページは計算用紙として使用してよい)

(このページは計算用紙として使用してよい)

数学Ⅲ 問題

〔Ⅰ〕 次の空欄アからキに当てはまるものを解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の数字をマークせよ。なお、一つの解答群から同じものを二回以上選んでもよい。空欄クには、当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

$\log$ は自然対数を表すものとする。

$t > 0$ とする。 xy 座標平面上の曲線 $xy = 1 + t$ を C とし、直線 $x + y = 2 + t$ を ℓ とする。曲線 C と直線 ℓ は 2 点で交わり、その 2 つの交点の x 座標はそれぞれ 1 と ア である。曲線 C と直線 ℓ で囲まれた図形を A とし、その面積を $f(t)$ とすると、

$$f(t) = \frac{t}{2} \left(\text{イ} \right) - \left(\text{ウ} \right) \log \left(\text{エ} \right)$$

である。

また、図形 A を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $g(t)$ とすると、

$$g(t) = \frac{\text{オ}}{3} \pi$$

である。関数 $f(t)$ の第 2 次導関数は

$$f''(t) = \frac{\text{カ}}{\text{キ}}$$

となるから

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{g''(t)}{f''(t)} = \text{ク} \pi$$

がわかる。

ア、イ、ウ、エ、オ、カ、キの解答群

- | | | | | |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| ① t | ② t^2 | ③ t^3 | ④ $1 + t$ | ⑤ $2 + t$ |
| ⑥ $1 + 2t$ | ⑦ $1 + t^2$ | ⑧ $2 + t^2$ | ⑨ $1 + t^3$ | ⑩ $2 + t^3$ |

(このページは計算用紙として使用してよい)

〔Ⅱ〕 次の空欄に当てはまる 0 から 9 までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。

a, b, c は実数の定数として，関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \begin{cases} a & (x \leq 0) \\ \frac{\sin(\pi x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x(x-1)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}{(\pi x(x-1))^2} & (0 < x < 1) \\ b - c\pi(x-1) & (x \geq 1) \end{cases}$$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \boxed{\mathcal{A}}$ であることから，関数 $f(x)$ が， $x = 0$ で連続ならば

$$a = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

となり， $x = 1$ で微分可能ならば

$$b = \boxed{\text{エ}}, \quad c = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

となる。

(このページは計算用紙として使用してよい)

〔Ⅲ〕 次の空欄アからオに当てはまるものを解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の数字をマークせよ。なお、一つの解答群から同じものを二回以上選んでもよい。それ以外の空欄には、当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

a, b を正の実数とし、方程式 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ によって定まる楕円を E とする。楕円 E が不等式 $y \geq x^2 - 1$ の表す領域 D に含まれるための、 a, b の条件を調べたい。

楕円 E は θ を媒介変数として、

$$x = \boxed{\text{ア}} \cos \theta, \quad y = \boxed{\text{イ}} \sin \theta$$

と表示できる。楕円 E が領域 D に含まれる必要十分条件は

$$\boxed{\text{ウ}} \sin^2 \theta + \boxed{\text{エ}} \sin \theta + 1 - \boxed{\text{オ}} \geq 0$$

である。そこで、 $f(x) = \boxed{\text{ウ}} x^2 + \boxed{\text{エ}} x + 1 - \boxed{\text{オ}}$ とおき、 $-1 \leq x \leq 1$ のときに $f(x) \geq 0$ となる条件を求めればよい。放物線 $y = f(x)$ の軸を直線 $x = c$ とおく。このとき、

$$c = -\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{カ}} \boxed{\text{ウ}}} < 0$$

である。 $c \leq -1$ のときは、 $f(-1) \geq 0$ により $b \leq \boxed{\text{キ}}$ となる。 $c > -1$ のときは、 $f(x) = 0$ の判別式を使って $b \leq \boxed{\text{ク}} a - \boxed{\text{ケ}} a^2$ がわかる。

上で求めた a, b の満たす範囲を ab 座標平面に図示することにより、楕円 E が領域 D に含まれるための必要十分条件は、

$$0 < b \leq \boxed{\text{キ}} \quad \text{かつ} \quad 0 < a \leq \frac{\boxed{\text{コ}} + \sqrt{\boxed{\text{サ}} - b}}{\boxed{\text{シ}}}$$

であることがわかる。

ア、イ、ウ、エ、オの解答群

- | | | | | |
|--------------|---------------|---------|--------------|-----------|
| ① $\sqrt{a}$ | ① a | ② a^2 | ③ $\sqrt{b}$ | ④ b |
| ⑤ b^2 | ⑥ $\sqrt{ab}$ | ⑦ ab | ⑧ $a^2 b^2$ | ⑨ $a + b$ |

(このページは計算用紙として使用してよい)

〔Ⅳ〕 次の空欄ウ、カ、ケ、シ、スに当てはまるものを解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の数字をマークせよ。なお、一つの解答群から同じものを二回以上選んでもよい。それ以外の空欄には、当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし、**セソタチ** は、4 桁の数を表すものとする。

$\log$ は自然対数を表し、 n は 4 以上の自然数とする。

- (1) $m = 2, 3, \dots, n-1$ に対して、4 点 $(m, 0)$, $(m+1, 0)$, $(m+1, \log(m+1))$, $(m, \log m)$ を頂点とする台形の面積を A_m とする。このとき、次が成り立つ。

$$\frac{1}{2} \log 2 + \sum_{m=2}^{n-1} A_m = \log(n!) - \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \boxed{\text{ウ}}$$

- (2) $k = 1, 2, \dots, n$ に対して、 $y = f_k(x)$ は点 $(k, \log k)$ における $y = \log x$ の接線の方程式であるとする。 $B = \int_1^{\frac{3}{2}} f_1(x) dx$, $m = 2, 3, \dots, n-1$ に対して $C_m = \int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} f_m(x) dx$, $D = \int_{n-\frac{1}{2}}^n f_n(x) dx$ とおく。このとき、以下が成り立つ。

$$B = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

$$C_m = \boxed{\text{カ}}$$

$$D = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \boxed{\text{ケ}} - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}} \boxed{\text{シ}}}$$

- (3) B, D および, $m = 2, 3, \dots, n-1$ に対して A_m, C_m は, (1), (2) で定めたものとする。このとき, $y = \log x$ のグラフは上に凸であるので,

$$\frac{1}{2} \log 2 + \sum_{m=2}^{n-1} A_m \leq \int_1^n \log x \, dx \leq B + \sum_{m=2}^{n-1} C_m + D$$

が成り立つ。ここで, $\int_1^n \log x \, dx = \boxed{\text{ス}} + 1$ を使うと,

$$1 - \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \leq \log(n!) - \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{ス}} \leq 1$$

となる。この不等式を利用して 1000! の桁数を求めると, $\boxed{\text{セソタチ}}$ であることがわかる。ただし, $\frac{1}{\log 10} = 0.4343$ とする。

ウ, カ, ケ, シ, スの解答群

- | | | |
|----------------------|-------------------|-------------------|
| ① n | ① m | ② $\log n$ |
| ③ $\log m$ | ④ $\log(n+1)$ | ⑤ $\log(m+1)$ |
| ⑥ $n \log n$ | ⑦ $n(\log n - 1)$ | ⑧ $n(\log n + 1)$ |
| ⑨ $\frac{\log n}{n}$ | | |