

【I】

【解答】

(1)	<table><tr><td>ア</td><td>C</td></tr><tr><td>イ</td><td>G</td></tr></table>	ア	C	イ	G	(3)	<table><tr><td>ア</td><td>H</td></tr><tr><td>ア</td><td>D</td></tr></table>	ア	H	ア	D																						
	ア	C																															
イ	G																																
ア	H																																
ア	D																																
(2)	<table><tr><td>ア</td><td>E</td></tr><tr><td>イ</td><td>H</td></tr><tr><td>ウ</td><td>G</td></tr><tr><td>エ</td><td>F</td></tr><tr><td>オ</td><td>C</td></tr><tr><td>カ</td><td>F</td></tr></table>	ア	E	イ	H	ウ	G	エ	F	オ	C	カ	F	(5)	<table><tr><td>イ</td><td>A</td></tr><tr><td>ウ</td><td>E</td></tr><tr><td>ア</td><td>B</td></tr><tr><td>イ</td><td>B</td></tr><tr><td>ウ</td><td>F</td></tr><tr><td>エ</td><td>E</td></tr><tr><td></td><td>オ</td><td>G</td></tr><tr><td></td><td>カ</td><td>C</td></tr></table>	イ	A	ウ	E	ア	B	イ	B	ウ	F	エ	E		オ	G		カ	C
	ア	E																															
	イ	H																															
	ウ	G																															
	エ	F																															
	オ	C																															
カ	F																																
イ	A																																
ウ	E																																
ア	B																																
イ	B																																
ウ	F																																
エ	E																																
	オ	G																															
	カ	C																															

【解説】

(1)

与えられた方程式を

$$x^3 - 6x^2 + 9x + 2 = a$$

と変形する。このとき、方程式の実数解は曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ のグラフと直線 $y = a$ のグラフの共有点の x 座標である。ここで

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$

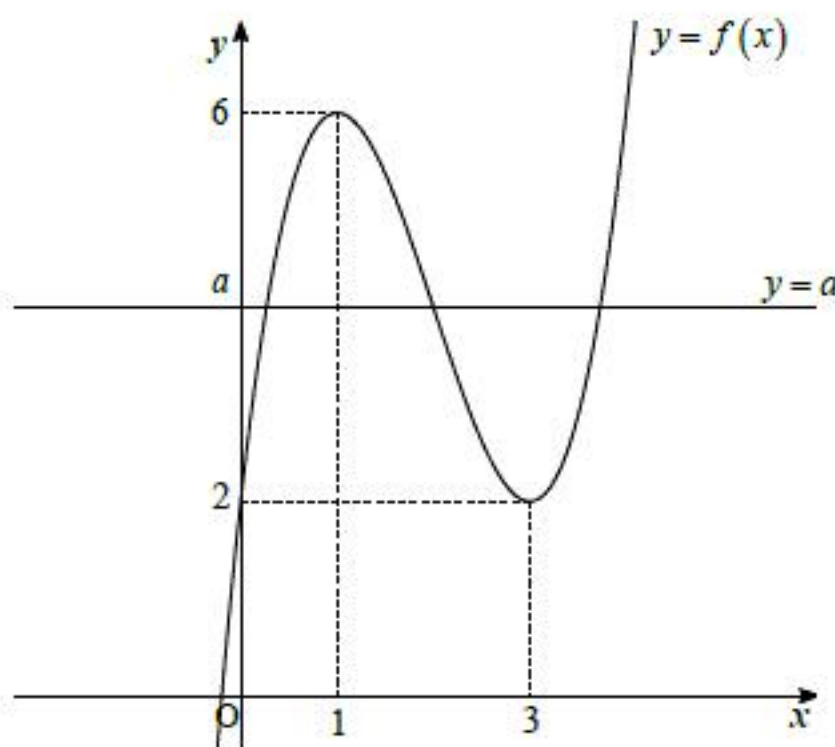
とおき、 x で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

となるから、増減表は下のようになる。

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	6	↘	2	↗

増減表より、 $y = f(x)$ のグラフは下のようになる。



上図より、3次方程式が異なる2つの実数解をもつときの a の値は、2または6である。

(2)

確率変数 X を、内閣を支持するとき $X=1$ 、内閣を支持しないとき $X=0$ とする。与えられた条件より、標本として1600人を実無作為に抽出したところ、内閣の支持者が800人であったことから、標本における X の平均を m 、標準偏差を σ とおくと、

$$m = \frac{800}{1600} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{800 \cdot 0^2 + 800 \cdot 1^2}{1600} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma = \frac{1}{2} \quad (\because \sigma \geq 0)$$

となる。したがって、求める信頼度95%の信頼区間は、

$$\begin{aligned} m - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{1600}} &\leq p \leq m + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{1600}} \\ \therefore 0.4755 &\leq p \leq 0.5245 \end{aligned}$$

となるから、小数第4位で四捨五入すると、

$$\therefore 0.476 \leq p \leq 0.525$$

である。

(3)

$0^\circ < \angle A < 180^\circ$, $0^\circ < \angle C < 180^\circ$ より $\sin A, \sin C > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin C &= \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{3\sqrt{3}}{14} \end{aligned}$$

となる。したがって、正弦定理より

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin C} &= \frac{BC}{\sin A} \\ \Leftrightarrow BC &= AB \cdot \frac{\sin A}{\sin C} \\ \therefore BC &= 7 \end{aligned}$$

が得られる。

(4)

d の値による場合分けを考える。

[1] $d=0$ のとき

このとき、 $a+b+c=17$ である。ここで、17個の○と2本の仕切り | を並べるとき、1本目の仕切りの左側にある○の個数を a 、1本目と2本目の仕切りの間にある○の個数を b 、2本目の仕切りの右側にある○の個数を c とする。たとえば、

○○○○○○ | ○○ | ○○○○○○○○○

のとき、 $a=6, b=2, c=9$ である。このとき、 $a+b+c=17$ を満たす0以上の整数 (a, b, c) の組み合わせの総数は、17個の○と2本の仕切り | を並べる方法の総数に等しく、

$${}_{17+2}C_2 = {}_{19}C_2 = 171 \text{ (通り)}$$

である。

[2] $d=1$ のとき

このとき、 $a+b+c=12$ である。[1]と同様に考えると、 (a, b, c) の組み合わせの総数は

$${}_{12+2}C_2 = {}_{14}C_2 = 91 \text{ (通り)}$$

である。

[3] $d=2$ のとき

このとき、 $a+b+c=7$ である。[1]と同様に考えると、 (a, b, c) の組み合わせの総数は

$${}_{7+2}C_2 = {}_9C_2 = 36 \text{ (通り)}$$

である。

[4] $d=3$ のとき

このとき、 $a+b+c=2$ である。[1]と同様に考えると、 (a, b, c) の組み合わせの総数は

$${}_{2+2}C_2 = {}_4C_2 = 6 \text{ (通り)}$$

である。

[5] $d>3$ のとき

このとき $a+b+c<0$ となるから、 a, b, c が0以上の整数である条件に反するため不適である。

以上[1]から[5]より、求める整数解の組の総数は

$$171 + 91 + 36 + 6 = 304 \text{ (通り)}$$

である。

(5)

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{20 \cdot 21} - \frac{1}{21 \cdot 22} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{21 \cdot 22} \right) \\ &= \frac{115}{462} \end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	B
	イ	E
(2)	ウ	E
	エ	D
	オ	B
(3)	カ	D
	キ	G
	ク	D

〔解説〕

(1)

点Pは線分OAの中点であるから、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

であり、点Qは線分BCの中点であるから、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

である。また、点Rは線分PQの中点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

である。

(2)

(1)の結果より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA} \\ &= -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

である。また、AR:AS=1:tより

$$\overrightarrow{AS} = t\overrightarrow{AR}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} \\ &= \left(1 - \frac{3}{4}t\right)\vec{a} + \frac{1}{4}t\vec{b} + \frac{1}{4}t\vec{c}\end{aligned}$$

と表される。ここで、点Sは平面OBC上の点であるから、 $\overrightarrow{OS}$ は $\vec{b}, \vec{c}$ のみで表すことができる。

一方、 $\vec{a}$ は平面OBC上のベクトルではないから、 $\vec{b}, \vec{c}$ で表すことができない。したがって、

$$\begin{aligned}1 - \frac{3}{4}t &= 0 \\ \therefore t &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

となるから、

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$$

である。

(3)

正四面体の一辺の長さを d とおくと、

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= |\vec{b}| = |\vec{c}| = d \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = d \cdot d \cdot \cos 60^\circ = \frac{d^2}{2}\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \\ \overrightarrow{AO} &= -\vec{a}\end{aligned}$$

であるから、それぞれのベクトルの大きさは

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AS}|^2 &= |\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{c}|^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{2}{3}\vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{2}{3}d^2 \\ \therefore |\overrightarrow{AS}| &= \frac{\sqrt{6}}{3}d \\ |\overrightarrow{AO}| &= d\end{aligned}$$

となり、内積は

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AO} = |\vec{a}|^2 - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{2}{3}d^2$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AS}| |\overrightarrow{AO}|} \\ &= \frac{\frac{2}{3}d^2}{\frac{\sqrt{6}}{3}d \cdot d} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

である。

【Ⅲ】

【解答】

$$(1) \quad \boxed{a^2 + 3ma + 3n} = 0$$

$$(2) \quad \left(\boxed{a}, \boxed{-\frac{1}{3}a^2} \right)$$

$$(3) \quad y = \boxed{-ax + \frac{2}{3}a^2} \quad T_2 = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3}$$

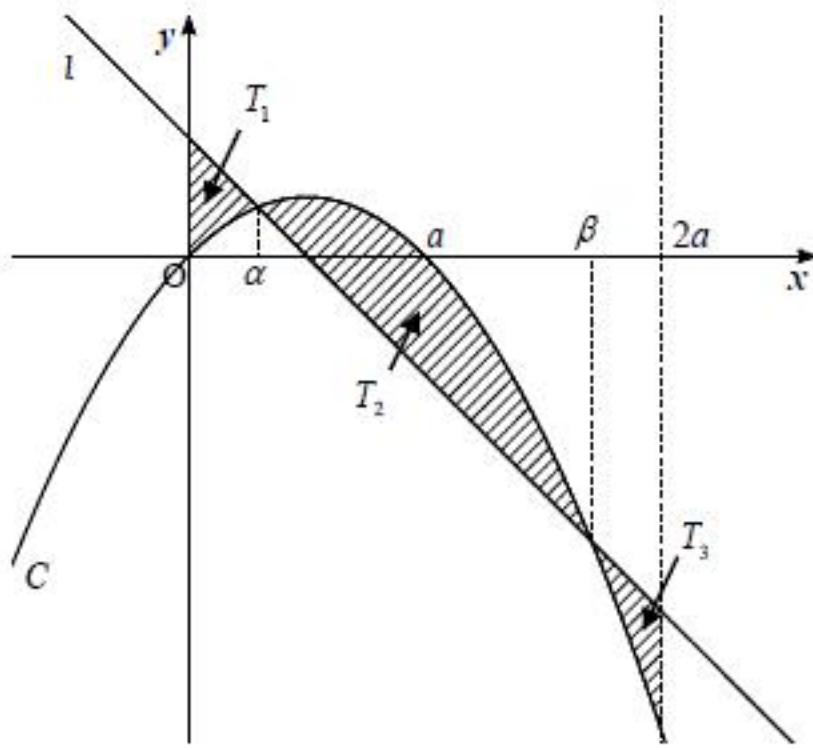
$$(4) \quad \alpha = \boxed{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} a$$

$$\beta = \boxed{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} a$$

【解説】

(1)

放物線と直線のグラフは以下のようになる。



放物線と直線の交点の x 座標は、2 次方程式

$$\begin{aligned} -x^2 + ax &= mx + n \\ \Leftrightarrow x^2 + (m-a)x + n &= 0 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

の異なる 2 つの実数解である。また、 T_1, T_2, T_3 はそれぞれ

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^a \{(mx+n) - (-x^2+ax)\} dx \\ &= \int_0^a \{x^2 + (m-a)x + n\} dx \\ T_2 &= -\int_a^\beta \{x^2 + (m-a)x + n\} dx \\ T_3 &= \int_\beta^{2a} \{x^2 + (m-a)x + n\} dx \end{aligned}$$

と書ける。ここで、条件より $T_2 = T_1 + T_3$ であるから、

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 + T_3 \\ \Leftrightarrow -\int_a^\beta \{x^2 + (m-a)x + n\} dx &= \int_0^a \{x^2 + (m-a)x + n\} dx + \int_\beta^{2a} \{x^2 + (m-a)x + n\} dx \\ \Leftrightarrow \int_0^a \{x^2 + (m-a)x + n\} dx + \int_a^\beta \{x^2 + (m-a)x + n\} dx + \int_\beta^{2a} \{x^2 + (m-a)x + n\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^{2a} \{x^2 + (m-a)x + n\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(m-a)x^2 + nx \right]_0^{2a} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{3}a(a^2 + 3ma + 3n) &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。 $a > 0$ より、

$$a^2 + 3ma + 3n = 0$$

が成り立つ。

(2)

(1)の結果より、

$$\begin{aligned} a^2 + 3ma + 3n &= 0 \\ \Leftrightarrow n &= -\frac{1}{3}a^2 - ma \end{aligned}$$

となるから、これを直線 l の方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} y &= mx - \frac{1}{3}a^2 - ma \\ &= m(x-a) - \frac{1}{3}a^2 \end{aligned}$$

となる。このとき、 m の値によらず $(x, y) = \left(a, -\frac{1}{3}a^2\right)$ が成り立つから、直線 l は m, n によらず定点 $\left(a, -\frac{1}{3}a^2\right)$ を通る。

(3)

(1)の過程より、

$$\begin{aligned} T_2 &= -\int_a^\beta \{x^2 + (m-a)x + n\} dx \\ &= -\int_a^\beta (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

となる。一方、2 次方程式①の解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a - m \\ \alpha\beta = n \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} (\beta-\alpha)^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (a-m)^2 - 4n \\ &= a^2 - 2am + m^2 + \frac{4}{3}a^2 + 4ma \\ &= \frac{7}{3}a^2 + 2am + m^2 \\ &= (m+a)^2 + \frac{4}{3}a^2 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $m = -a$ のときに $(\beta-\alpha)^2$ は最小値 $\frac{4}{3}a^2$ をとる。ここで $\beta-\alpha > 0$ より、

$(\beta-\alpha)^2$ が最小値をとる m において、 $(\beta-\alpha)^3$ も最小値をとる。このときの直線 l の方程式は

$$y = -ax + \frac{2}{3}a^2$$

であり、 T_2 は

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}a^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{27}a^3 \end{aligned}$$

である。

(4)

(3)の結果より、①を解くと

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + \frac{2}{3}a^2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}a \end{aligned}$$

となるので、 $\alpha < \beta$ より

$$\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{3}a, \beta = \frac{3+\sqrt{3}}{3}a$$

となる。