

【I】

【解答】

(1)	ア	3
	イ	6

(2)	ウ	8
	エ	4

(3)	オ	7
	カ	9
	キ	2

(4)	ク	1
	ケ	6
	コ	5
	サ	0

(5)	シ	2
	ス	9
	セ	5
	ソ	1
	タ	4

【解説】

(1)

1800 を素因数分解すると

$$1800=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$$

となるから、1800 の正の約数は全部で

$$(3+1)\times (2+1)\times (2+1)=36$$

個ある。 $ab=1800$ を満たす正の整数 a, b の組の数は1800 の正の約数の数に等しいから、このような a, b の組は全部で36 通りある。

(2)

$a<b<c<10$ となる正の整数 a, b, c の組の数は、1 から9 までの整数から異なる3 つを選ぶ場合の数に等しく、それは全部で

$${}_9C_3=84$$

通りある。

(3)

$$12a=4b+3c$$

$$\Leftrightarrow 4(3a-b)=3c \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となるから、正の整数 a, b, c について①が成立するとき、正の整数 n を用いて

$$c=4n \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と表され、さらに①より

$$4(3a-b)=3\cdot 4n$$

$$\Leftrightarrow b=3(a-n) \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となるから、正の整数 a, b, c について③が成立するとき、正の整数 m を用いて

$$b=3m \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$a=m+n$$

と表される。以上より、 $12a=4b+3c, b<100, c<100$ となる正の整数 a, b, c の組の個数は、②、④より

$$0<3m<100, 0<4n<100$$

となる正の整数 m, n の組の個数と等しい。 $0<3m<100, 0<4n<100$ を満たす正の整数 m, n の個数はそれぞれ1 以上99 以下の整数に含まれる3, 4 の倍数の個数に等しく、それぞれ33 個、24 個である。 m, n は独立に選ぶことができるから、上記を満たす正の整数 m, n の組は全部で

$$33\times 24=792$$

通りあり、 $12a=4b+3c, b<100, c<100$ となる正の整数 a, b, c の組は全部で792 通りある。

(4)

$3c<100$ を満たしうる正の整数 c は全部で33 個ある。このそれぞれの c の値に対して $a+b=3c$ となる正の整数 a, b の組は

$$(a, b)=(1, 3c-1), (2, 3c-2), \dots, (3c-1, 1)$$

の $3c-1$ 通りある。以上より、 $a+b=3c<100$ となる a, b, c の組は全部で

$$\begin{aligned}\sum_{c=1}^{33}(3c-1)&=3\cdot \frac{33\cdot 34}{2}-33 \\ &=1650\end{aligned}$$

通りある。

(5)

$$a+\log_3(b+c)=10$$

$$\Leftrightarrow \log_3(b+c)=10-a$$

$$\Leftrightarrow b+c=3^{10-a} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

となる。 b, c が正の整数であるとき $b+c\geq 2$ であるから、⑤を満たしうる正の整数 a の値の範囲は

$$2\leq 3^{10-a} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\Rightarrow 1<3^{10-a}$$

$$\Leftrightarrow 0<10-a$$

$$\Leftrightarrow 1\leq a<10$$

$$\Leftrightarrow 1\leq a\leq 9 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

となり、逆に⑦であるとき⑥を満たすから、⑤を満たす正の整数 a の値の範囲は⑦となる。このそれぞれの a の値に対して⑤を満たす正の整数 b, c の組は

$$(b, c)=(1, 3^{10-a}-1), (2, 3^{10-a}-2), \dots, (3^{10-a}-1, 1)$$

の $3^{10-a}-1$ 通りある。以上より、 $a+\log_3(b+c)=10$ となる a, b, c の組は全部で

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^9(3^{10-a}-1)&=\sum_{t=1}^93^t-9 \\ &=3\cdot \frac{3^9-1}{3-1}-9 \\ &=\frac{3^{10}-3}{2}-9 \\ &=\frac{59049-3}{2}-9 \\ &=29514\end{aligned}$$

通りある。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	チ	3
	ツ	2
	テ	5
	ト	4
	ナ	2
	ニ	7

(2)	ヌ	1
	ネ	7
	ノ	5
	ハ	2
	ヒ	5
	フ	1
	ヘ	4
	ホ	5
	マ	7

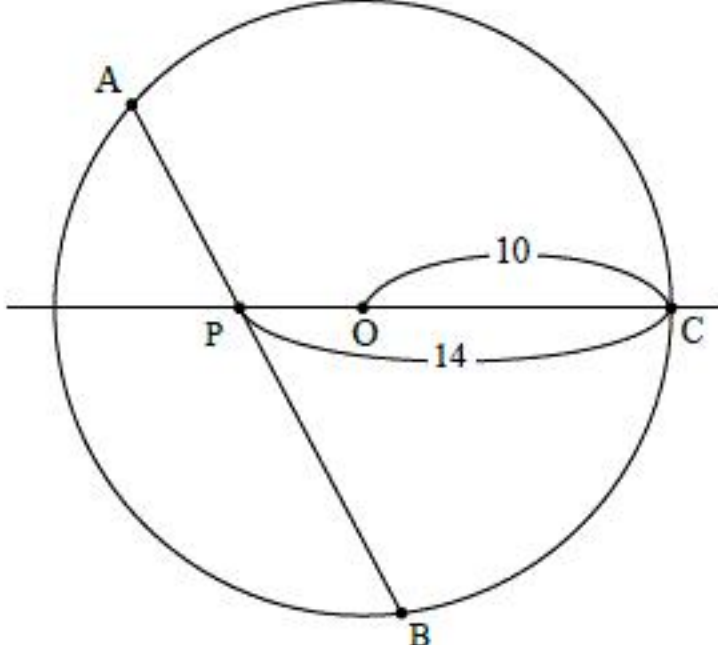
(3)	ミ	1
	ム	7
	メ	5
	モ	7
	ヤ	4

〔解説〕

- (1) $AP:BP=2:3$ であるから、 $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= \frac{3}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}\end{aligned}$$

である。また、点Pは点Oを中心とする半径10の円周上の点A, B, Cに対して線分ABと直線COの交点であることから、点Oを中心とする半径10の円の周および内部に存在する。さらに、CP=14であるから各点の位置関係は下図のようになる。



よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CO} &= \frac{10}{14}\overrightarrow{CP} \\ &= \frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{7}\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO} \\ &= \vec{a} - \frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{7} \\ &= \frac{4\vec{a}-2\vec{b}}{7}\end{aligned}$$

と表すことができる。

(2)

(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CO} \\ &= \vec{b} - \frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{7} \\ &= \frac{-3\vec{a}+5\vec{b}}{7}\end{aligned}$$

と表すことができ、また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= -\overrightarrow{CO} \\ &= \frac{-3\vec{a}-2\vec{b}}{7}\end{aligned}$$

である。点A, B, Cは点Oを中心とする半径10の円周上にあるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OA}| &= |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 10 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}|^2 &= |\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 = 100 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16|\vec{a}|^2 - 16\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2}{49} = 100 \\ \frac{9|\vec{a}|^2 - 30\vec{a} \cdot \vec{b} + 25|\vec{b}|^2}{49} = 100 \\ \frac{9|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2}{49} = 100 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}|^2 = 350 \\ |\vec{b}|^2 = 175 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{175}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

となり、さらに

$$\begin{aligned}CA &= |\vec{a}| \\ &= 5\sqrt{14}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}CB &= |\vec{b}| \\ &= 5\sqrt{7}\end{aligned}$$

である。

(3)

三角形ABCの面積をSとおくと

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{350 \cdot 175 - \left(\frac{175}{2}\right)^2} \\ &= \frac{175\sqrt{7}}{4}\end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	欄 A	$a+b=0$	欄 B	$(1, 2)$
-----	-----	---------	-----	----------

(2)

曲線 $C: y = ax^2 + bx + 2$ と直線 $\ell: y = ax + b + 2$ の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + 2 &= ax + b + 2 \\ \Leftrightarrow ax^2 + (b-a)x - b &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を満たす。 $a > 0$ であることから、 $\textcircled{1}$ は x についての 2 次方程式である。よって、 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると、曲線 C と直線 ℓ が 2 つの交点を持つとき

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow (b-a)^2 + 4ab &> 0 \\ \Leftrightarrow (a+b)^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow a+b &\neq 0 \end{aligned}$$

となる。このもとで曲線 C と直線 ℓ の 2 交点の x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、 α, β は 2 次方程式 $\textcircled{1}$ の解であり、 $a > 0$ であるから解と係数の関係より

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{a-b}{a} \\ \alpha\beta &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2} \\ &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a-b}{a}\right)^2 + 4 \cdot \frac{b}{a}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a+b}{a}\right)^2} \\ &= \left| \frac{a+b}{a} \right| \end{aligned}$$

であり、 $\beta - \alpha = 4$ であるとする

$$\left| \frac{a+b}{a} \right| = 4 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。 $a > 0$ であるから曲線 C と直線 ℓ で囲まれる部分の面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{ (ax + b + 2) - (ax^2 + bx + 2) \} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \{ ax^2 + (b-a)x - b \} dx \\ &= -a \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{a}{6} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{a}{6} \cdot 4^3 \end{aligned}$$

となるから $S = 64$ であるとする

$$\begin{aligned} \frac{a}{6} \cdot 4^3 &= 64 \\ \Leftrightarrow a &= 6 \end{aligned}$$

となる。さらに、 $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} \left| \frac{6+b}{6} \right| &= 4 \\ \Leftrightarrow b &= 18, -30 \end{aligned}$$

となるから、以上を満たす a, b の値は

$$(a, b) = (6, 18), (6, -30)$$

である。

(答) $(a, b) = (6, 18), (6, -30)$

〔解説〕

(1)

曲線 $C: y = ax^2 + bx + 2$ と直線 $\ell: y = ax + b + 2$ の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + 2 &= ax + b + 2 \\ \Leftrightarrow ax^2 + (b-a)x - b &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を満たす。 $a > 0$ であることから、 $\textcircled{1}$ は x についての 2 次方程式である。よって、 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると、曲線 C と直線 ℓ がただ 1 つの共有点を持つための必要十分条件は

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow (b-a)^2 + 4ab &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+b)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a+b &= 0 \end{aligned}$$

となる。このとき $b = -a$ となるから、曲線 C と直線 ℓ の共有点の x 座標は $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} ax^2 - 2ax + a &= 0 \\ \Leftrightarrow a(x^2 - 2x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 &= 0 \quad (\because a > 0) \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

となり、 y 座標は

$$\begin{aligned} y &= a + b + 2 \\ &= 2 \quad (\because a + b = 0) \end{aligned}$$

となる。