

【I】

〔解答〕

(1) G (2) J (3) J (4) M (5) Q (6) B

〔解説〕

1.

2と5を共に素因数をもち、それ以外の素数を素因数にもたない自然数 N は、自然数 m, n を用いて

$$N=2^m \times 5^n$$

と表すことができる。 $n \geq 3$ のとき

$$N > 5^3 = 125 > 100$$

となるから、 N が100以下となり得るのは、 $n=1, 2$ のいずれかの場合である。

[1] $n=1$ のとき

$N=2^m \times 5$ であり、 N が100以下となるのは

$$2^m \times 5 \leq 100$$

$$\Leftrightarrow 2^m \leq 20$$

のときであるから、これを満たす自然数 m は $m=1, 2, 3, 4$ の4個存在する。

[2] $n=2$ のとき

$N=2^m \times 5^2$ であり、 N が100以下となるのは

$$2^m \times 5^2 \leq 100$$

$$\Leftrightarrow 2^m \leq 4$$

のときであるから、これを満たす自然数 m は $m=1, 2$ の2個存在する。

以上、[1], [2]より、100以下の自然数で2と5を共に素因数をもち、それ以外の素数を素因数にもたない数の個数は、 $4+2=6$ 個である。

同様に、2と3を共に素因数をもち、それ以外の素数を素因数にもたない自然数 N' は、自然数 m', n' を用いて

$$N'=2^{m'} \times 3^{n'}$$

と表すことができる。 $n' \geq 4$ のとき

$$N' \geq 2 \times 3^4 = 162 > 100$$

となるから、 N' が100以下となり得るのは、 $n'=1, 2, 3$ のいずれかの場合である。

[1] $n'=1$ のとき

$N'=2^{m'} \times 3$ であり、 N' が100以下となるのは

$$2^{m'} \times 3 \leq 100$$

$$\Leftrightarrow 2^{m'} \leq \frac{100}{3}$$

のときであるから、これを満たす自然数 m' は $m'=1, 2, 3, 4, 5$ の5個存在する。

[2] $n'=2$ のとき

$N'=2^{m'} \times 3^2$ であり、 N' が100以下となるのは

$$2^{m'} \times 3^2 \leq 100$$

$$\Leftrightarrow 2^{m'} \leq \frac{100}{9}$$

のときであるから、これを満たす自然数 m' は $m'=1, 2, 3$ の3個存在する。

[3] $n'=3$ のとき

$N'=2^{m'} \times 3^3$ であり、 N' が100以下となるのは

$$2^{m'} \times 3^3 \leq 100$$

$$\Leftrightarrow 2^{m'} \leq \frac{100}{27}$$

のときであるから、これを満たす自然数 m' は $m'=1$ の1個存在する。

以上、[1], [2], [3]より、100以下の自然数で2と3を共に素因数をもち、それ以外の素数を素因数にもたない数の個数は、 $5+3+1=9$ 個である。

2.

$f(x)=x^3-3x+16$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-3$$

であるから、曲線 $C:y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

$$\Leftrightarrow y=3(t^2-1)x-2t^3+16$$

と表される。これが点 $(0, 0)$ を通るとき

$$0=3(t^2-1) \cdot 0 - 2t^3 + 16$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t+4)=0$$

$$\Leftrightarrow t=2$$

となり

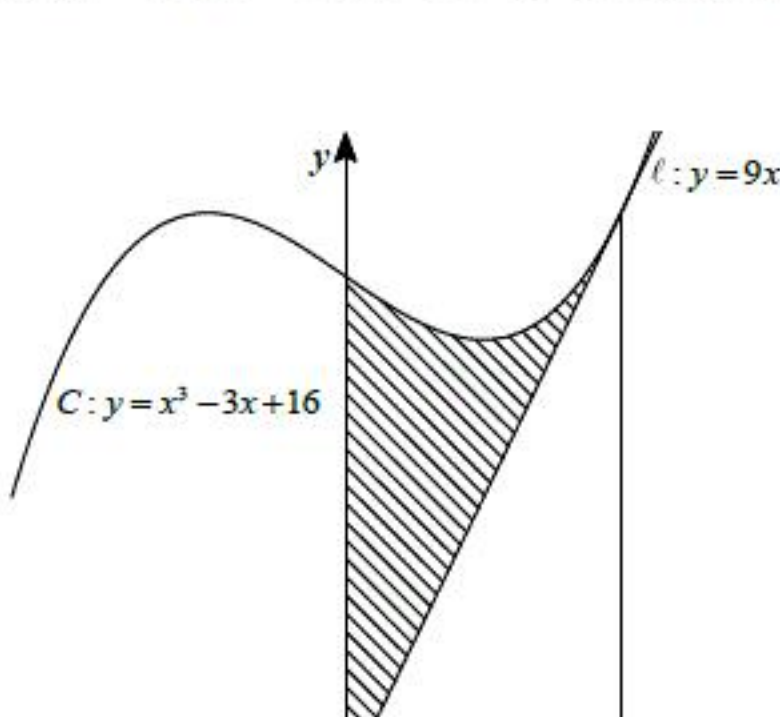
$$f(2)=18$$

であるから、曲線 C と点 $(0, 0)$ を通る直線が接するとき接点は $(2, 18)$ であり、これは第1象限に存在する。よって、直線 ℓ は曲線 C 上の点 $(2, 18)$ における接線であり、その方程式は

$$y=3(2^2-1)x-2 \cdot 2^3+16$$

$$\Leftrightarrow y=9x$$

となる。また、 C, ℓ の共有点の x 座標は2であることから、 C, ℓ と y 軸で囲まれた領域は下図



以上より、斜線部の面積は

$$\int_0^2 \{(x^3-3x+16)-9x\} dx = \left[\frac{x^4}{4} - 6x^2 + 16x \right]_0^2$$

$$=12$$

である。

3.

正方形 $ABCD$ の1辺の長さが y であるとき、 $OA=\frac{y}{\sqrt{2}}$ となる。 $\triangle OAE$ は $OA \perp OE$ の直角三

角形であるから、 $AE=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $OE=x$ であるとき三平方の定理より

$$OE^2 + OA^2 = AE^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{2} - 2x^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。ここで、 $y > 0$ であることから

$$\frac{3}{2} - 2x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるもとで、四角錐 $E-ABCD$ の面積を V とおくと、①より

$$V = \frac{1}{3}xy^2$$

$$= \frac{1}{3}x \cdot \left(\frac{3}{2} - 2x^2\right)$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x$$

となる。 V を x の関数と見て $f(x)\left(0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおくと

$$f'(x) = -2x^2 + \frac{1}{2}$$

$$= -2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

より、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$f'(x)$	$\diagdown$	+	0	-	$\diagup$
$f(x)$	$\diagdown$	$\nearrow$		$\searrow$	$\diagdown$

以上より、四角錐 $E-ABCD$ の体積は $x=\frac{1}{2}$ で最大となり、このとき、①と $y > 0$ であること

より

$$y = \sqrt{\frac{3}{2} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=1$$

である。

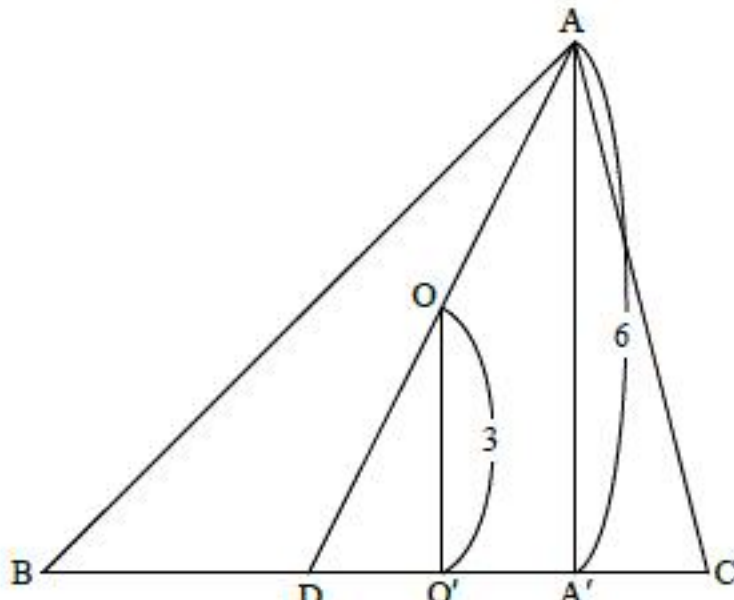
〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	1	イ	1	ウ	5	エ	3	オ	3	カ	5	キ	4
ク	0	ケ	7	コ	3	サ	0	シ	7	ス	1	セ	0
ソ	3	タ	8	チ	3	ツ	1	テ	4	ト	2	ナ	5

〔解説〕

1.



点 A, O から l に下ろした垂線の足をそれぞれ A', O' とすると, $AA' = 6, OO' = 3$ $\triangle DAA'$ と $\triangle DOO'$ について

$$\angle ADA' = \angle ODO', \angle DA'A = \angle DO'O (= 90^\circ)$$

であることより, $\triangle DAA' \sim \triangle DOO'$ となる。よって, 相似な図形の対応する辺の比が等しいことから

$$\frac{AD}{DO} = \frac{AA'}{OO'} = 2$$

であり

$$\begin{aligned} \frac{AO}{DO} &= \frac{AD - DO}{DO} \\ &= \frac{AD}{DO} - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。また, B から直線 AD に下ろした垂線の長さを h とおくと

$$\triangle ABO = \frac{1}{2} AO \cdot h, \triangle BDO = \frac{1}{2} DO \cdot h$$

となるから

$$\begin{aligned} \frac{\triangle ABO}{\triangle BDO} &= \frac{\frac{1}{2} AO \cdot h}{\frac{1}{2} DO \cdot h} \\ &= \frac{AO}{DO} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

2.

点 B, C から直線 AD に下ろした垂線の足をそれぞれ B', C' とすると

$$\triangle ABO = \frac{1}{2} AO \cdot BB'$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{2} AO \cdot BB'$$

であり, また

$$\triangle ACO = \frac{1}{2} AO \cdot CC'$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{2} AO \cdot CC'$$

であるから

$$\frac{CC'}{BB'} = \frac{b}{c}$$

となる。さらに

$$\triangle BDO = \frac{1}{2} DO \cdot BB', \triangle CDO = \frac{1}{2} DO \cdot CC'$$

であるから, $b = 10, c = 6$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\triangle CDO}{\triangle BDO} &= \frac{\frac{1}{2} DO \cdot CC'}{\frac{1}{2} DO \cdot BB'} \\ &= \frac{CC'}{BB'} \\ &= \frac{b}{c} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\triangle BCO = \triangle BDO + \triangle CDO$$

$$\Leftrightarrow a = \left(1 + \frac{5}{3}\right) \triangle BDO$$

$$\Leftrightarrow \triangle BDO = 3 \quad (\because a = 8)$$

であり

$$\triangle CDO = \frac{5}{3} \triangle BDO = 5$$

である。同様にして

$$\begin{aligned} \frac{\triangle CEO}{\triangle AEO} &= \frac{a}{c} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

より

$$\triangle ACO = \triangle AEO + \triangle CEO$$

$$\Leftrightarrow b = \left(1 + \frac{4}{3}\right) \triangle AEO$$

$$\Leftrightarrow \triangle AEO = \frac{30}{7}$$

であり

$$\triangle CEO = \frac{4}{3} \triangle AEO = \frac{40}{7}$$

である。また

$$\begin{aligned} \frac{\triangle AFO}{\triangle BFO} &= \frac{b}{a} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

より

$$\triangle ABO = \triangle AFO + \triangle BFO$$

$$\Leftrightarrow c = \left(1 + \frac{5}{4}\right) \triangle BFO$$

$$\Leftrightarrow \triangle BFO = \frac{8}{3}$$

であり

$$\triangle AFO = \frac{5}{4} \triangle BFO = \frac{10}{3}$$

である。以上より

$$\frac{\triangle AFO}{\triangle BFO} \cdot \frac{\triangle BDO}{\triangle CDO} \cdot \frac{\triangle CEO}{\triangle AEO} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} = 1$$

であり, また

$$\begin{aligned} \frac{AO}{DO} \cdot \frac{BO}{EO} \cdot \frac{CO}{FO} &= \frac{\triangle ABO}{\triangle BDO} \cdot \frac{\triangle BCO}{\triangle CEO} \cdot \frac{\triangle ACO}{\triangle AFO} \\ &= \frac{6}{3} \cdot \frac{8}{40} \cdot \frac{10}{10} \\ &= \frac{42}{5} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

1.

$n=4, k=2$ のとき、4つのチームを A, B, C, D とする。A が B と対戦しない場合、C, D のいずれのチームとも対戦することになる。また、B も C, D のいずれのチームとも対戦することになる。さらに、C, D はともに A, B のいずれのチームとも対戦するため、C, D は互いに対戦することはない。このとき、大会は1通りに決まる。A が C と対戦しない場合、D と対戦しない場合も大会は同様に1通りに決まるから、 $n=4, k=2$ の場合の大会は、3通りある。

(答) 3通り

2.

$n=6, k=3$ のとき、試合に参加するのべのチーム数は

$$6 \times 3 = 18$$

であり、1つの試合には2チームが参加するから、このときの1つの大会の試合の総数は

$$\frac{18}{2} = 9 \text{ 試合}$$

となる。

(答) 9 試合

3.

命題「一般に、この大会が成立するためには、 n か k のどちらかが、偶数でなければならない」を背理法を用いて証明する。 n, k がともに奇数であると仮定する。この大会において試合に参加するのべのチーム数は

$$nk$$

であり、1つの試合には2チームが参加するから、このときの1つの大会の試合の総数は

$$\frac{nk}{2} \text{ 試合}$$

となる。ここで、 n, k がともに奇数であるとき、 nk も奇数となるが、試合の総数 $\frac{nk}{2}$ は整数とならず不合理である。よって、仮定は誤りであり、命題が真であることが示された。

(証明終)

4.

$n=9$ のとき、3の結果を用いて k は偶数となる。さらに、 k は $n > k$ を満たす自然数であるから $k=2, 4, 6, 8$ のいずれかとなる。さらに、この大会の試合の総数は $\frac{9k}{2}$ 試合であるから、1試

合の平均得点が $\left(\frac{1}{27}k^2 - \frac{7}{9}k + 5\right)$ 点であったとすると、1つの大会における総得点 $S(k)$ は

$$\begin{aligned} S(k) &= \left(\frac{1}{27}k^2 - \frac{7}{9}k + 5\right) \cdot \frac{9k}{2} \\ &= \frac{1}{6}k^3 - \frac{7}{2}k^2 + \frac{45}{2}k \end{aligned}$$

と表される。よって

$$\begin{aligned} S(2) &= \frac{97}{3} \\ S(4) &= \frac{134}{3} \\ S(6) &= 45 \\ S(8) &= \frac{124}{3} \end{aligned}$$

となるから、1つの大会における総得点をもっとも多くなる k は

$$k=6$$

である。

(答) $k=6$