

〔I〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
2	4	2	4	0	1	5	6	0

〔解説〕

$n=4$ のとき、各箱には玉を1個ずつ入れる。よって、求める場合の数は

$$4! = 24 \text{ [通り]}$$

となる。

$n=5$ のとき、各箱のうち1つの箱には玉を2個、他3つの箱には玉を1個ずつ入れる。異なる5個の玉を2個、1個、1個、1個に分ける方法の総数は

$${}_5C_2 = 10 \text{ [通り]}$$

であるから、求める場合の数は

$$10 \cdot 4! = 240 \text{ [通り]}$$

となる。

$n=6$ のとき、各箱のうち1つの箱に玉を3個、他3つの箱に玉を1個ずつ入れるか、各箱のうち2つの箱に玉を2個、他2つの箱に玉を1個ずつ入れる。6個の玉を3個、1個、1個、1個に分ける場合の数は

$${}_6C_3 = 20 \text{ [通り]}$$

であり、2個、2個、1個、1個に分ける場合の数は

$$\frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_2}{2!} = 45 \text{ [通り]}$$

であるから、求める場合の数は

$$(20 + 45) \cdot 4! = 1560 \text{ [通り]}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
4	1	2	3	1	1	0	2	3

〔解説〕

自然数 m に対して、 n 以下の自然数のうち 2^m の倍数であるものの個数を $g_n(m)$ としたとき、 $f(n)$ の値は和 $g_n(1)+g_n(2)+g_n(3)+\cdots$ と一致することに注意する。

(1)

$n=7$ のとき

7 以下の自然数のうち 2 の倍数であるものは 3 個： $g_7(1)=3$

7 以下の自然数のうち 2^2 の倍数であるものは 1 個： $g_7(2)=1$

7 以下の自然数のうち 2^k ($k \geq 3$) の倍数であるものは 0 個： $g_7(k)=0$

であるから、 $f(7)$ の値は

$$f(7)=3+1=4$$

と求まる。

(2)

(1)と同様に考えると

$$f(8)=4+2+1=7$$

$$f(9)=4+2+1=7$$

$$f(10)=5+2+1=8$$

$$f(11)=5+2+1=8$$

$$f(12)=6+3+1=10$$

となる。 $f(n)$ は n に関する単調増加関数であるから、求める整数は 12 であることがわかる。

(3)

$f(n+1)=f(n)+5$ となるのは、 $n+1$ が 2^5 で割り切れるが 2^6 で割り切れないときである。したがって、これを満たす n のうち最小のものは

$$n+1=2^5$$

$$\therefore n=31$$

である。

(4)

$n=2^{10}$ のとき

2^{10} 以下の自然数のうち 2^k ($k \leq 10$) の倍数であるものは $\frac{2^{10}}{2^k}$ 個： $g_n(k)=2^{10-k}$

2^{10} 以下の自然数のうち 2^k ($k > 10$) の倍数であるものは 0 個： $g_n(k)=0$

であるから、 $f(2^{10})$ の値は

$$f(2^{10})=2^9+2^8+\cdots+2+1=\frac{1-2^{10}}{1-2}=1023$$

と求まる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

あ

0

い

$(\alpha + \beta)x - \alpha\beta$

う

$\frac{\alpha\beta + \frac{1}{2}}{\sqrt{(\alpha + \beta)^2 + 1}}$

え

$\frac{1}{\alpha} + 2$

お

$\frac{1}{2n}$

〔解説〕

円 C の方程式は $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ であるから、円 C と放物線 D の共有点の座標は

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

となるため、円 C と放物線 D の共有点の x 座標は 0 である。また、直線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + \alpha^2 \\ &\Leftrightarrow y = (\alpha + \beta)x - \alpha\beta \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)x - y - \alpha\beta = 0 \end{aligned}$$

であるため、直線 l と点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ の距離は、点と直線の距離公式より

$$\frac{\left|(\alpha + \beta) \cdot 0 - \frac{1}{2} - \alpha\beta\right|}{\sqrt{(\alpha + \beta)^2 + (-1)^2}} = \frac{\alpha\beta + \frac{1}{2}}{\sqrt{(\alpha + \beta)^2 + 1}} \quad (\because \alpha > \beta > 0)$$

と表せる。よって、直線 l が円 C に接するとき、求めた値が半径と一致することから

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\beta + \frac{1}{2}}{\sqrt{(\alpha + \beta)^2 + 1}} &= \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2\alpha\beta + 1 = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow (2\alpha\beta + 1)^2 = (\alpha + \beta)^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow (2\alpha\beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 \\ &\Leftrightarrow 2\alpha\beta = \alpha - \beta \quad (\because \alpha > \beta > 0) \\ \therefore \frac{1}{\beta} &= \frac{1}{\alpha} + 2 \end{aligned}$$

となる。

さて、放物線上の点 P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を問題文の条件のように定めると、先の結果より

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + 2$$

を満たす。ここで、点 P_1 の座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ であることから $\frac{1}{x_1} = 2$ より、数列 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ の一般項は

$$\frac{1}{x_n} = 2n$$

であることがわかるため、 x_n を n を用いて表すと

$$x_n = \frac{1}{2n}$$

となる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

$$\boxed{\text{か}} \quad \boxed{\frac{1}{\cos t}} \quad \boxed{\text{き}} \quad \boxed{\frac{1}{1-u^2}} \quad \boxed{<} \quad \boxed{\frac{1}{2}} \quad \boxed{\text{け}} \quad \boxed{\frac{1}{2} \log 3}$$

〔解説〕

時刻 t における点 P の座標 (x, y) が

$$x = t, y = -\log(\cos t)$$

と表されているとき、それぞれを t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\cos t} \cdot (-\sin t) = \tan t$$

となるから、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ において、 $\cos t > 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{1^2 + \tan^2 t} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} \\ &= \frac{1}{\cos t} \quad (\because \cos t > 0) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $t = 0$ から $t = \frac{\pi}{6}$ までの間に点 P が動く道のり L は

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{\cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

と立式できる。ここで、 $u = \sin t$ とおくと、 t と u の対応関係は

$$\begin{array}{c|cc} \frac{du}{dt} & \cos t & \\ \hline t & 0 & \rightarrow \frac{\pi}{6} \\ \hline u & 0 & \rightarrow \frac{1}{2} \end{array}$$

となるから、 L の値は

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-u) + (1+u)}{(1-u)(1+u)} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left[\log(1+u) - \log(1-u) \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\log \frac{3}{2} - \log \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log 3 \end{aligned}$$

と計算できる。

〔V〕

(1)

関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = e^{x-a} + b, \quad g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

とおく。2 曲線 C, D が点 $P(t, f(t))$ で接するための条件は

$$\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{t-a} + b = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \\ e^{t-a} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{-a} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ b = e^{-t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \log 2 - \log(1 - e^{-2t}) \\ b = e^{-t} \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = \log 2 - \log(1 - e^{-2t}), \quad b = e^{-t}$$

(2)

(1)における考察より、直線 $x=0$ と曲線 C の交点の y 座標は

$$\begin{aligned} f(0) &= e^{-a} + b \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) + e^{-t} \end{aligned}$$

であることがわかる。ここで、 $T = e^{-t}$ とおくと t が $t > 0$ の範囲を動くとき、 T の動く範囲は

$$0 < T < 1$$

であり、 $f(0)$ の値は T の 2 次関数

$$\begin{aligned} f(0) &= -\frac{1}{2}T^2 + T + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(T-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

と表せるから、求める値の範囲は

$$\frac{1}{2} < y < 1$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} < y < 1$$

(3)

(1)における考察より、直線 $x=k (>0)$ と曲線 C の交点の y 座標は

$$\begin{aligned} f(k) &= e^{k-a} + b \\ &= \frac{e^k}{2}(1 - e^{-2t}) + e^{-t} \end{aligned}$$

であることがわかる。ここで、 $T = e^{-t}$ とおくと t が $t > 0$ の範囲を動くとき、 T の動く範囲は

$$0 < T < 1$$

であり、 $f(k)$ の値は T の 2 次関数

$$\begin{aligned} f(k) &= -\frac{e^k}{2}T^2 + T + \frac{e^k}{2} \\ &= -\frac{e^k}{2}(T - e^{-k})^2 + \frac{1}{2}(e^k + e^{-k}) \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $0 < e^{-k} < 1$ であり

$$e^{-k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \log 2$$

であることに注意して、以下求める値の範囲について場合分けをして考える

[1] $0 < k < \log 2$ のとき

このとき、 $\frac{1}{2} < e^{-k} < 1$ であるから、求める値の範囲は

$$\begin{aligned} -\frac{e^k}{2} \cdot 0^2 + 0 + \frac{e^k}{2} < y &\leq -\frac{e^k}{2}(e^{-k} - e^{-k})^2 + \frac{1}{2}(e^k + e^{-k}) \\ \Leftrightarrow \frac{e^k}{2} < y &\leq \frac{1}{2}(e^k + e^{-k}) \end{aligned}$$

となる。

[2] $\log 2 \leq k$ のとき

このとき、 $0 < e^{-k} \leq \frac{1}{2}$ であるから、求める値の範囲は

$$\begin{aligned} -\frac{e^k}{2} \cdot 1^2 + 1 + \frac{e^k}{2} < y &\leq -\frac{e^k}{2}(e^{-k} - e^{-k})^2 + \frac{1}{2}(e^k + e^{-k}) \\ \Leftrightarrow 1 < y &\leq \frac{1}{2}(e^k + e^{-k}) \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より求める値の範囲は

$$\begin{cases} 0 < k < \log 2 \text{ のとき, } \frac{e^k}{2} < y \leq \frac{1}{2}(e^k + e^{-k}) \\ \log 2 \leq k \text{ のとき, } 1 < y \leq \frac{1}{2}(e^k + e^{-k}) \end{cases}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} 0 < k < \log 2 \text{ のとき, } \frac{e^k}{2} < y \leq \frac{1}{2}(e^k + e^{-k}) \\ \log 2 \leq k \text{ のとき, } 1 < y \leq \frac{1}{2}(e^k + e^{-k}) \end{cases}$$