

〔 I 〕

〔解答〕

1	A
---	---

2	H
---	---

〔解説〕

2 次方程式 $x^2 + 3ax + 2a^2 - a + 3 = 0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (3a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a^2 - a + 3) \\ &= a^2 + 4a - 12 \\ &= (a+6)(a-2) \end{aligned}$$

と計算できるので、この 2 次方程式が虚数解をもつための条件は

$$\begin{aligned} D &< 0 \\ \Leftrightarrow (a+6)(a-2) &< 0 \\ \therefore -6 &< a < 2 \end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

3	C
---	---

〔解説〕

遮へい板の枚数を n とおく。このとき

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \frac{1}{30}$$

が成り立つような最小の自然数 n を求めればよい。上式の両辺の対数をとると

$$\log_{10} \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \log_{10} \frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow n(3\log_{10} 2 - \log_{10} 10) \leq -(\log_{10} 3 + \log_{10} 10)$$

$$\Leftrightarrow -0.097n \leq -1.4771$$

$$\Leftrightarrow n \geq 15.227 \dots$$

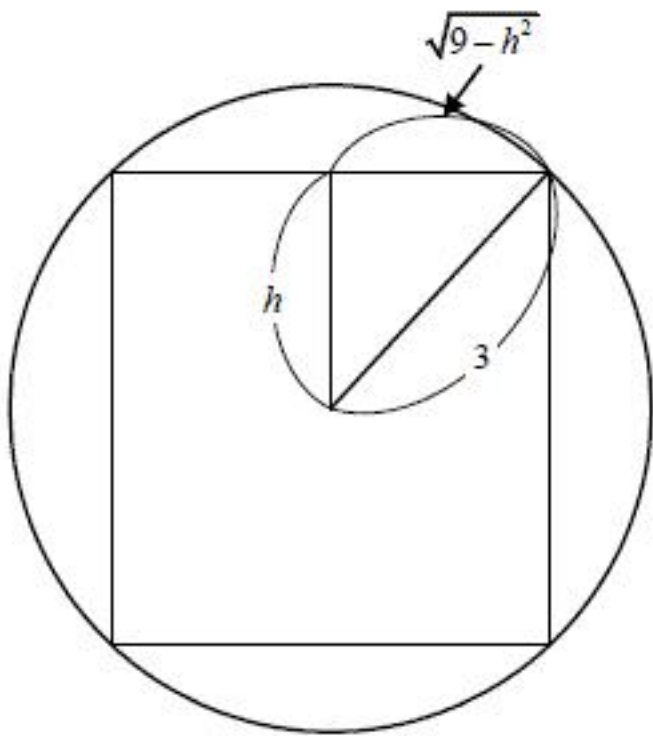
となる。したがって、求める自然数 n は $n=16$ であり、遮へい板は最低 16 枚必要である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

4	F
---	---

〔解説〕



円柱の高さを $2h$ とすると、球の半径は 3 であるから、 h のとりうる値の範囲は $0 < h < 3$ である。上図は円柱の底面の中心を通る面で切った場合の円柱と球の断面図である。上図より、円柱の高さが $2h$ のとき、円柱の底面は半径 $\sqrt{9-h^2}$ の円となるから、球に内接する円柱の体積を $V(h)$ とすると

$$\begin{aligned} V(h) &= \left(\sqrt{9-h^2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 2h \\ &= 2\pi(9h-h^3) \end{aligned}$$

と表せる。この関数の導関数は

$$\begin{aligned} V'(h) &= 2\pi(9-3h^2) \\ &= 6\pi(3-h^2) \end{aligned}$$

であるから、 $0 < h < 3$ における $V(h)$ の増減表は以下のようになる。

h	(0)	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	(3)
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

ここで、極大値について

$$V(\sqrt{3}) = 2\pi(9\sqrt{3}-3\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}\pi$$

であるから、 $V(h)$ は $h = \sqrt{3}$ のとき、**最大値** $12\sqrt{3}\pi$ をとることがわかる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

5	H	6	C
---	---	---	---

〔解説〕

点Pは直線ℓ上の点であるから、実数pを用いて

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と表せて、同様に点Qは実数qを用いて

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

と表せるから、ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ は

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2-2p+q \\ 10-p+3q \\ -12-4p-3q \end{pmatrix}$$

と成分表示できる。ここで、 $\overrightarrow{PQ}$ が直線ℓおよび直線mに垂直であるとき、 $\overrightarrow{PQ}$ は $\vec{a}, \vec{b}$ に垂直であることから、この条件を整理すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &\perp \vec{a} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-2-2p+q) \cdot 2 + (10-p+3q) \cdot 1 + (-12-4p-3q) \cdot 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow -42-21p-7q &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &\perp \vec{b} \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-2-2p+q) \cdot 1 + (10-p+3q) \cdot 3 + (-12-4p-3q) \cdot (-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow 64+7p+19q &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。①、②を連立して解くと

$$(p, q) = (-1, -3)$$

となるから、各ベクトルの成分表示は

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり、線分PQの長さは

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

と求まる。

〔V〕

〔解答〕

7	C
---	---

8	E
---	---

9	J
---	---

101	$\frac{703}{2187}$
-----	--------------------

〔解説〕

(1)

頂点 A にいる点 P が 2 秒後に頂点 A にいる確率は、1 秒後に点 P が頂点 A にいる場合と頂点 A 以外にいる場合とで場合分けをして考えると

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot 3 = \frac{13}{27}$$

と求まる。また、点 A に対する点 B, C, D の対称性より、頂点 A にいる点 P が 2 秒後に頂点 B, C, D にいる確率すべて同じであるから、頂点 A にいる点 P が 2 秒後に頂点 B にいる確率は

$$\frac{1 - \frac{13}{27}}{3} = \frac{14}{81}$$

と求まる。

(2)

頂点 A にいる点 P が 3 秒後に頂点 A にいる確率は、2 秒後に頂点 A にいる場合と頂点 A 以外にいる場合とで場合分けして考えると、(1)の結果と合わせて

$$\frac{13}{27} \cdot \frac{2}{3} + \frac{14}{81} \cdot \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{92}{243}$$

と求まる。

(3)

点 A に対する点 B, C, D の対称性より、頂点 A にいる点 P が 3 秒後に頂点 B, C, D にいる確率は、それぞれ

$$\frac{1 - \frac{92}{243}}{3} = \frac{151}{729}$$

であるから、頂点 A にいる点 P が 4 秒後に頂点 A にいる確率は、3 秒後に頂点 A にいる場合と頂点 A 以外にいる場合とで場合分けして考えると、(2)の結果と合わせて

$$\frac{92}{243} \cdot \frac{2}{3} + \frac{151}{729} \cdot \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{703}{2187}$$

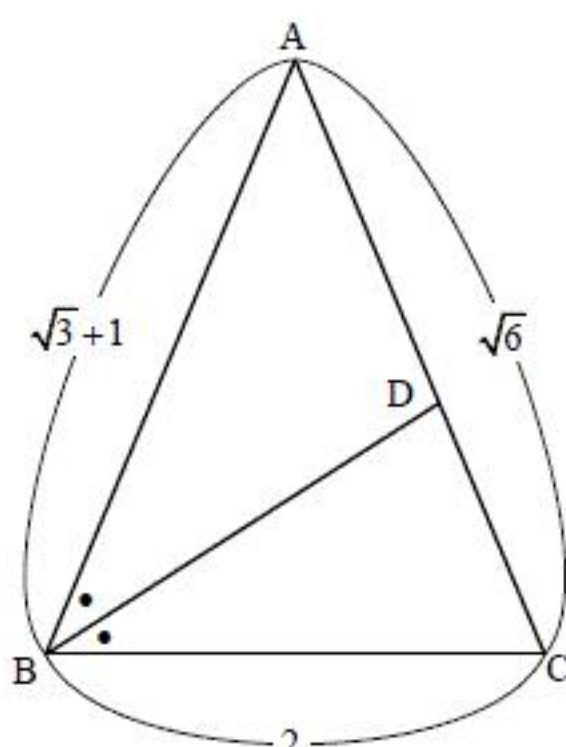
と求まる。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

10	G	11	E	102	2
12	F	103	$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}$		

〔解説〕



(1)

$\triangle ABC$ において余弦定理を用いることにより、 $\cos A$ の値は

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2 \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot \sqrt{6}} \\ &= \frac{6+2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

(2)

線分 BD は $\angle B$ の 2 等分線であることから、線分 AD と DC の長さの比は

$$AD:DC = \sqrt{3}+1:2$$

となる。したがって、線分 AD の長さは

$$\begin{aligned}AD &= \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)+2} AC \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} \cdot \sqrt{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} \cdot \sqrt{6} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

と求まる。

(3)

$\triangle ABD$ において余弦定理を用いることにより、線分 BD の長さは

$$\begin{aligned}BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A \\ &= (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\therefore BD = 2$$

と求まる。

(4)

$0 < \angle A < \pi$ であることから $\sin A > 0$ であるため、 $\sin A$ の値は

$$\begin{aligned}\sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

と求まる。したがって、外接円の半径を R とすると、 $\triangle ABC$ において正弦定理を用いることにより

$$\begin{aligned}2R &= \frac{BC}{\sin A} \\ \therefore R &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

と求まる。

(5)

$\triangle ABC$ の面積を S とすると、この値は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+3}{2}\end{aligned}$$

と計算できる。ここで、内接円の半径を r とすると、この値は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \{(\sqrt{3}+1) + 2 + \sqrt{6}\} \cdot r &= S \\ \Leftrightarrow r &= \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}+\sqrt{3}} \\ &= \frac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3}-3)}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2 - 3^2} \\ &= \frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}-6}{6\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}\end{aligned}$$

と求まる。