

【I】

【解答】

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
最大	C	A	B	C	B
最小	A	C	A	B	C

【解説】

(1) $\{1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 7\}$ の平均値は
$$\frac{1+1+2+3+4+5+6+6+6+7}{10} = \frac{41}{10}$$
 であり、中央値は
$$\frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}$$
 であり、最頻値は6である。
$$\frac{41}{10} < \frac{9}{2} < 6$$
 であるから、最大のものは最頻値であり、最小のものは平均値である。

(2) θ は第2象限の角であるから、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ である。よって
$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$
 となる。ここから
$$\begin{cases} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$
 となる。ここで
$$\begin{aligned} \cos \theta - \tan \theta &= -\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{15} \\ &> 0 \end{aligned}$$
 $\therefore \cos \theta > \tan \theta$ である。よって $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) > 0 > \cos \theta > \tan \theta$ であるから、最大のものは $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ であり、最小のものは $\tan \theta$ となる。

(3) 半径4、面積 4π の扇形の中心角を θ_1 とおくと
$$\frac{\theta_1}{2} \cdot 4^2 = 4\pi$$

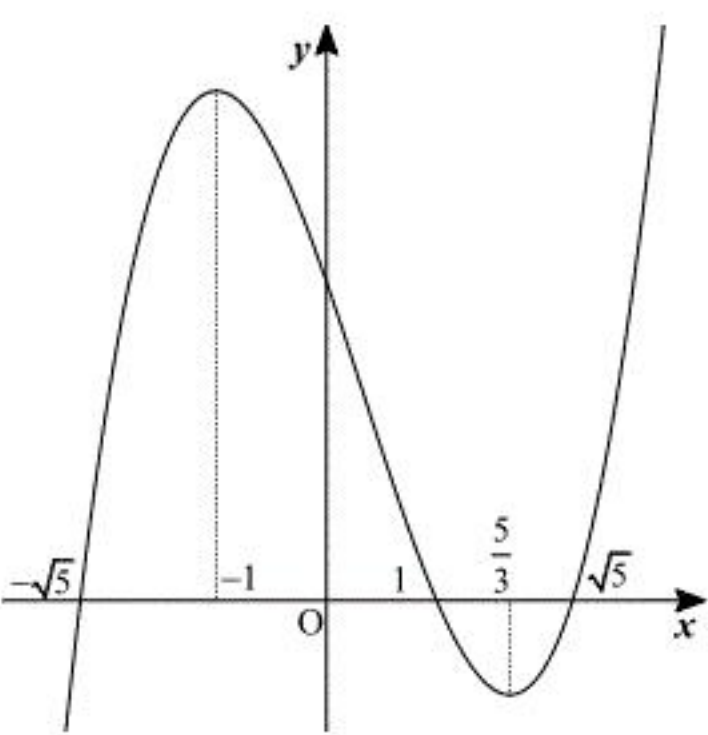
$$\Leftrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$
 となるから、弧の長さは $4\theta_1 = 2\pi$ となる。半径5、中心角 $\frac{\pi}{2}$ の扇形の弧の長さは $5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi$ となり、半径6、中心角 72° の扇形の弧の長さは $6 \cdot 2\pi \cdot \frac{72}{360} = \frac{12}{5}\pi$ となる。よって $2\pi < \frac{12}{5}\pi < \frac{5}{2}\pi$ となるから、最大のものは半径5、中心角 $\frac{\pi}{2}$ の扇形の弧の長さであり、最小のものは半径4、面積 4π の扇形の弧の長さである。

(4)
$$2x^3 + x^2 - 8x - 3 = (x+2)(2x^2 - 3x - 2) + 1$$
 となるから、 $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ である。よって
$$\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = -3 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$
 となるので、最大のものは $f(2)$ 、最小のものは $f(1)$ である。

(5)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 - 5x + 5 \\ &= (x-1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) \end{aligned}$$
 であり、
$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5 = (x+1)(3x-5)$$
 となるから、 $f(x)$ の増減表は下のとおりである。

x	...	-1	...	$\frac{5}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって、グラフは下のようになる。



上のグラフと、 $-\frac{2236}{1001}$ が $-\sqrt{5}$ とほぼ同じ値であること、 $\frac{502}{301}$ が $\frac{5}{3}$ とほぼ同じ値であることから
$$f\left(\frac{98}{299}\right) > f\left(-\frac{2236}{1001}\right) > f\left(\frac{502}{301}\right)$$
 となる。よって最大のものは $f\left(\frac{98}{299}\right)$ であり、最小のものは $f\left(\frac{502}{301}\right)$ である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	5	(3)	ケ	5
	イ	1		コ	1
(2)	ウ	1		サ	6
	エ	0		シ	1
	オ	7		ス	1
	カ	6		セ	1
	キ	3		ソ	6
	ク	6			

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 48^{30} &= 30 \log_{10} 48 \\
 &= 30 \log_{10} (2^4 \cdot 3) \\
 &= 30 (4 \log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\
 &= 30 (4 \cdot 0.3010 + 0.4771) \\
 &= 50.433
 \end{aligned}$$

より、

$$10^{50} < 48^{30} < 10^{51}$$

であるから、 48^{30} は 51 桁の数である。

(2)

放物線と直線の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned}
 x^2 - 7x + 6 &= x - 1 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x - 7)(x - 1) &= 0 \\
 \therefore x &= 1, 7
 \end{aligned}$$

であるから、交点の座標は

$$(x, y) = (1, 0), (7, 6)$$

である。また、両者によって囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned}
 \int_1^7 \{(x-1) - (x^2 - 7x + 6)\} dx &= -\int_1^7 (x-7)(x-1) dx \\
 &= \frac{1}{6} (7-1)^3 \\
 &= 36
 \end{aligned}$$

となる。

(3)

(a)

求める確率は

$${}_5C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}$$

となる。

(b)

一回目で A が勝ち、二回目で B が勝つ場合を AB のように表す。B が先に 3 勝する前に A が先に 2 勝する場合は

$$AA, ABA, BAA, ABBA, BABA, BBAA$$

の 6 パターンであるから、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16}$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	タ	$p-1$
	チ	$-p$
	ツ	q
(2)	テ	2
	ト	p^2-p+q^2-q+1
(3)	ナ	$\frac{1}{2}$
	ニ	$\frac{1}{2}$
	ヌ	$\frac{1}{2}$
	ネ	$\sqrt{2}$

〔解説〕

(1)

仮定より

$$\begin{cases} \overrightarrow{OE} = q\vec{c} \\ \overrightarrow{OD} = (1-p)\vec{a} + p\vec{b} \end{cases}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} \\ &= (p-1)\vec{a} - p\vec{b} + q\vec{c} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = OA \cdot OB \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

であり、同様に

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 2$$

である。よって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{DE}|^2 &= 2^2 \left\{ (p-1)^2 + p^2 + q^2 \right\} + 2 \cdot 2 \left\{ -p(p-1) - pq + q(p-1) \right\} \\ &= 4(p^2 - p + q^2 - q + 1) \end{aligned}$$

となる。

(3)

(2)の結果より、

$$|\overrightarrow{DE}|^2 = 4 \left\{ \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(q - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right\}$$

となる。よって、 $|\overrightarrow{DE}|^2$ は $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$ のとき最小値 2 をとることから、 $|\overrightarrow{DE}|$ の最小値は $\sqrt{2}$ で

ある。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

(1)

$$\frac{7}{5 \cdot 6}$$

(2)

第24項

(3)

$$\frac{1}{2}n(n+1)$$

(4)

$$\frac{n+1}{k(k+1)}$$

(5)

22個

(6)

(4)の結果を利用すると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{n+1}{k(k+1)} &= (n+1) \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= n\end{aligned}$$

である。

(答) n

〔解説〕

(1)

第 n 群には n 個の項が含まれているから、第 n 群の第1項目は、全体の

$$\sum_{k=1}^{n-1} k+1 = \frac{1}{2}n(n-1)+1 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n+1 \text{ (項目)}$$

である。 $n=6$ のとき、

$$\frac{1}{2} \cdot 6^2 - \frac{1}{2} \cdot 6 + 1 = 16$$

であるから、第20項は第6群の第5項目であるので

$$\frac{7}{5 \cdot 6}$$

となる。

(2)

第5項を変形すると、

$$\frac{4}{2 \cdot 3} = \frac{8}{3 \cdot 4}$$

となる。よって、同じ値は次に第7群の第3項に表れるから、

$$\frac{1}{2} \cdot 7^2 - \frac{1}{2} \cdot 7 + 1 + 3 - 1 = 24$$

より、第24項である。

(3)

(1)と同様に考えると、

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

となる。

(4)

仮定より、

$$\frac{n+1}{k(k+1)}$$

である。

(5)

第30群目までの各群に関して、最初の項が最も大きく、第2項目以降は単調に減少する。第

n 群の最初の項は $\frac{n+1}{2}$ であり、これが5より大きくなるのは第10群以降である。また、第 n

群の第2項目は $\frac{n+1}{6}$ であり、これが5より大きくなるのは第30群のみである。第3項目以降

が5より大きくなることはない。以上より、5より大きい項は、第10群から第30群までの最初の項と、第30群の第2項目であるから、求める項の個数は

$$21+1=22 \text{ 個}$$

である。

【V】

〔解答〕

(1)

$$(x-m)(x-2m)$$

(2)

$$(2x-m)(x+2)$$

(3)

$m < 0$ のとき $2m < x < m$, $m = 0$ のとき解なし, $m > 0$ のとき $m < x < 2m$

(4)

$m < -4$ のとき $\frac{m}{2} < x < -2$, $m = -4$ のとき解なし, $m > -4$ のとき $-2 < x < \frac{m}{2}$

(5)

(3), (4)の結果より, m の範囲について場合分けをして考える。

[1] $m = -4, 0$ のとき

(3), (4)の結果より, 連立不等式は解をもたないため, 不適である。

[2] $m < -4$ のとき

与えられた不等式を変形すると

$$\frac{m}{2} < x < -2 \text{ かつ } 2m < x < m$$

となるが, $m < \frac{m}{2}$ であるから, 連立不等式は解をもたないため, 不適である。

[3] $-4 < m < 0$ のとき

$$-2 < x < \frac{m}{2} \text{ かつ } 2m < x < m \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。 $-4 < m \leq -2$ のとき, $\textcircled{3}$ は解をもたないため, 不適である。 $-2 < m \leq -1$ のとき,

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow -2 < x < m$$

となるが, このとき x は整数とならないため, 不適である。 $-1 < m < -\frac{1}{2}$ のとき,

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow 2m < x < m$$

であり, $-2 < 2m < -1$ であることに注意すると, 連立不等式はただ1つの整数解 $x = -1$ を

もつ。 $-\frac{1}{2} \leq m < 0$ のときも同様に,

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow 2m < x < m$$

となるが, $-1 \leq 2m < 0$ より, このとき x は整数とならないため, 不適である。以上より,

$-1 < m < -\frac{1}{2}$ のときに, 連立不等式はただ1つの整数解 $x = -1$ をもつ。

[4] $m > 0$ のとき

与えられた不等式を変形すると

$$-2 < x < \frac{m}{2} \text{ かつ } m < x < 2m$$

となるが, $\frac{m}{2} < m$ であるから, 連立不等式は解をもたないため, 不適である。

以上[1]~[4]より, 連立不等式の整数解がただ1つとなるとき整数解は $x = -1$ であり, その

ときの m の範囲は $-1 < m < -\frac{1}{2}$ である。

(答) 整数解: $x = -1$, m の範囲: $-1 < m < -\frac{1}{2}$

〔解説〕

(1)

$$x^2 - 3mx + 2m^2 = (x-m)(x-2m)$$

である。

(2)

$$2x^2 - (m-4)x - 2m = (2x-m)(x+2)$$

となる。

(3)

(1)の結果より, $m < 0$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 2m < x < m$$

であり, $m > 0$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow m < x < 2m$$

であり, $m = 0$ のとき解なしである。

(4)

(2)の結果より, -2 と $\frac{m}{2}$ の大小関係を考えると, $m < -4$ のとき

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \frac{m}{2} < x < -2$$

であり, $m > -4$ のとき

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow -2 < x < \frac{m}{2}$$

であり, $m = -4$ のとき解なしである。