

【Ⅰ】

【解答】

(1)	ア	イ					
	5	5					
(2)	ウ	エ	オ				
	9	8	5				
(3)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	1	4	5	4	1	9	5
(4)	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	
	2	8	7	4	0	3	

【解説】

(1)
題意より

$$\begin{cases} \text{OA}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10} \\ \text{OB}=\sqrt{7^2+(-1)^2}=5\sqrt{2} \\ \text{AB}=\sqrt{(7-3)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{5} \end{cases}$$

であり、△OABについて余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos\angle\text{AOB} &= \frac{\text{OA}^2+\text{OB}^2-\text{AB}^2}{2\cdot\text{OA}\cdot\text{OB}} \\ &= \frac{10+50-20}{2\cdot\sqrt{10}\cdot5\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

である。∠AOBは三角形の内角であり、 $0<\angle\text{AOB}<\pi$ であるから

$$\begin{aligned} \sin\angle\text{AOB} &= \sqrt{1-(\cos\angle\text{AOB})^2} \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

となる。

(2)
3つすべての方式で失敗する確率は
 $(1-0.9)\cdot(1-0.7)\cdot(1-0.5)=0.1\cdot0.3\cdot0.5=0.015$

であるから、少なくとも1つの方式で失敗せず薬品が製造できる確率は
 $1-0.015=0.985$
であり、すなわち98.5%である。

(3)
題意より

$$\begin{aligned} a_1 &= S_1 = 5a_1 - 1 \\ \Leftrightarrow a_1 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= S_{n+1} - S_n \\ &= (5a_{n+1} - 1) - (5a_n - 1) \\ &= 5a_{n+1} - 5a_n \\ \therefore a_{n+1} &= \frac{5}{4}a_n \end{aligned}$$

となるから、数列 $\{a_n\}$ は初項 $\frac{1}{4}$ 、公比 $\frac{5}{4}$ の等比数列であり、一般項は、

$$a_n = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} = \frac{5^{n-1}}{4^n}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \log_{10} a_{2016} &= \log_{10} \frac{5^{2015}}{4^{2016}} \\ &= 2015\log_{10} 5 - 2016\log_{10} 4 \\ &= 2015\log_{10} \frac{10}{2} - 4032\log_{10} 2 \\ &= 2015 - 6047\log_{10} 2 \\ &= 2015 - 6047\times0.30103 \\ &= 194.67\dots \end{aligned}$$

であり、底10は1より大きいから

$$\begin{aligned} 194 &< \log_{10} a_{2016} < 195 \\ \Leftrightarrow 10^{194} &< a_{2016} < 10^{195} \end{aligned}$$

となる。よって、 a_{2016} の整数部分は195桁の数である。

(4)
題意より

$$\begin{cases} f(-1)=a-b+c=1 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ f(2)=4a+2b+c=31 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

である。また、

$$g'(x)=(x-1)f'(x)=(x-1)(2ax+b)$$

であり、 $g(x)$ は $x=-2$ で極値をとることから

$$\begin{aligned} g'(-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a\cdot(-2)+b &= 0 \\ \therefore b &= 4a & \cdots\cdots\textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。①、②、③より

$$(a,b,c)=(2,8,7)$$

となる。このとき、

$$g'(x)=4(x-1)(x+2)$$

となるから、 $g(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	...	-2	...	1	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって、増減表より、 $g(x)$ は $x=-2$ で極大値をとり、その値は

$$\begin{aligned} \int_0^{-2}(t-1)(4t+8)dt &= 4\int_0^{-2}(t^2+t-2)dt \\ &= 4\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^{-2} \\ &= \frac{40}{3} \end{aligned}$$

となる。

【Ⅱ】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	
	3	1	1	1	6	
(2)	カ					
	6					
(3)	キ	ク	ケ	コ		
	2	2	4	2		
(4)	サ	シ	ス			
	2	4	2			

〔解説〕

(1)

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とおくと

$$\begin{cases} \left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{e}\right|=1 \\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{e}=1\cdot1\cdot\cos60^{\circ}=\frac{1}{2} \\ \vec{c}\cdot\vec{e}=0 \end{cases}$$

となる。題意より

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{e}$$

であるから、△BCP の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{BC}\right|^2\left|\overrightarrow{BP}\right|^2-\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}\right)^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2\left|\frac{1}{2}\vec{e}-\vec{b}\right|^2-\left\{\left(\vec{c}-\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{e}-\vec{b}\right)\right\}^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1\cdot\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{8} \end{aligned}$$

となる。また、△BCP と△PQC は高さが等しく、中点連結定理より底辺の長さの比が

BC:PQ=2:1 であるから、△PQB の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{11}}{8}=\frac{\sqrt{11}}{16}$$

となる。四角形PQCB の面積は△BCP と△PQC の面積を足し合わせたものに等しいから

$$\frac{\sqrt{11}}{8}+\frac{\sqrt{11}}{16}=\frac{3\sqrt{11}}{16}$$

となる。

(2)

(1)に加え $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とすると、

$$\begin{cases} \left|\vec{c}\right|=\left|\vec{d}\right|=\left|\vec{e}\right|=1 \\ \vec{d}\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{e}=\frac{1}{2} \\ \vec{c}\cdot\vec{e}=0 \end{cases}$$

となる。ここで題意より

$$\begin{cases} \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\vec{d} \\ \overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d} \end{cases}$$

となるから、

$$\begin{cases} \overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\vec{e}-\frac{1}{2}\vec{d} \\ \overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\vec{c} \end{cases}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \cos\angle PQR &= \frac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}{\left|\overrightarrow{QP}\right|\left|\overrightarrow{QR}\right|} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\vec{e}-\frac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\frac{1}{2}\vec{c}}{\left|\frac{1}{2}\vec{e}-\frac{1}{2}\vec{d}\right|\left|\frac{1}{2}\vec{c}\right|} \\ &= \frac{\left(\vec{e}-\vec{d}\right)\cdot\vec{c}}{\left|\vec{e}-\vec{d}\right|\left|\vec{c}\right|} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}}{1\cdot1} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。 $0<\angle PQR<180^{\circ}$ であるから $\angle PQR=120^{\circ}$ である。

(3)

図より

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{ED}=\vec{d}-\vec{e} \\ \overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{e} \\ \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\vec{d} \end{cases}$$

であるから、

$$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AQ}-2\overrightarrow{AP}$$

である。また、

$$\begin{cases} \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c} \\ \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\vec{d} \\ \overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d} \end{cases}$$

であるから、

$$\overrightarrow{BE}=4\overrightarrow{AQ}-2\overrightarrow{AR}$$

である。

(4)

(3)より

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=2\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{AP}-\left(4\overrightarrow{AQ}-2\overrightarrow{AR}\right)=2\overrightarrow{AP}-4\overrightarrow{AQ}+2\overrightarrow{AR}$$

である。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	ア	イ					
	1	1					
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	2	0	2	2	4	1	5

【解説】

(1)

$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+14x+13$ を x で微分して整理すると

$$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+14=2(2x^3-6x^2-2x+7)$$

である。題意より、 a, b, c は 3 次方程式

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^3-6x^2-2x+7 &= 0\end{aligned}$$

の解であるから、解と係数の関係式より

$$a+b+c=3, ab+bc+ca=-1, abc=-\frac{7}{2}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &= 3^2-2\cdot(-1) \\ &= 11\end{aligned}$$

となる。

(2)

曲線 $y=f(x)$ と直線 m が異なる 3 個の共有点をもつとき、4 次方程式

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x+p \\ \Leftrightarrow x^4-4x^3-2x^2+12x+13 &= p\end{aligned}$$

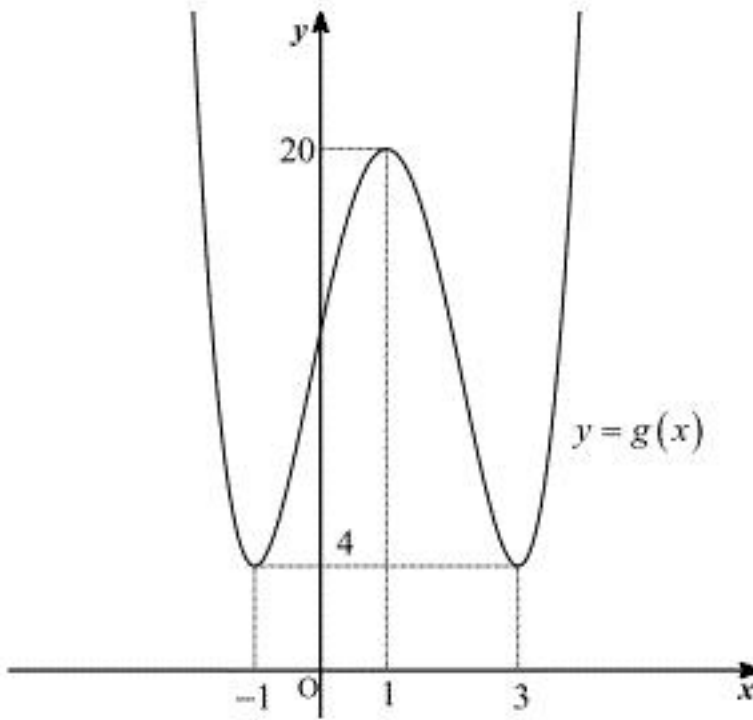
が異なる 3 つの実数解をもつ。上式の左辺を $g(x)$ とおくと、曲線 $y=g(x)$ と直線 $y=p$ の共有点について考えればよい。ここで

$$\begin{aligned}g'(x) &= 4x^3-12x^2-4x+12 \\ &= 4(x^3-3x^2-x+3) \\ &= 4\{x^2(x-3)-(x-3)\} \\ &= 4(x-3)(x-1)(x+1)\end{aligned}$$

であるから、 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	-1	...	1	...	3	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$	20	$\searrow$	4	$\nearrow$

よって $y=g(x)$ のグラフは下のようになる。



上のグラフより、求める p の値は

$$p=20$$

となる。

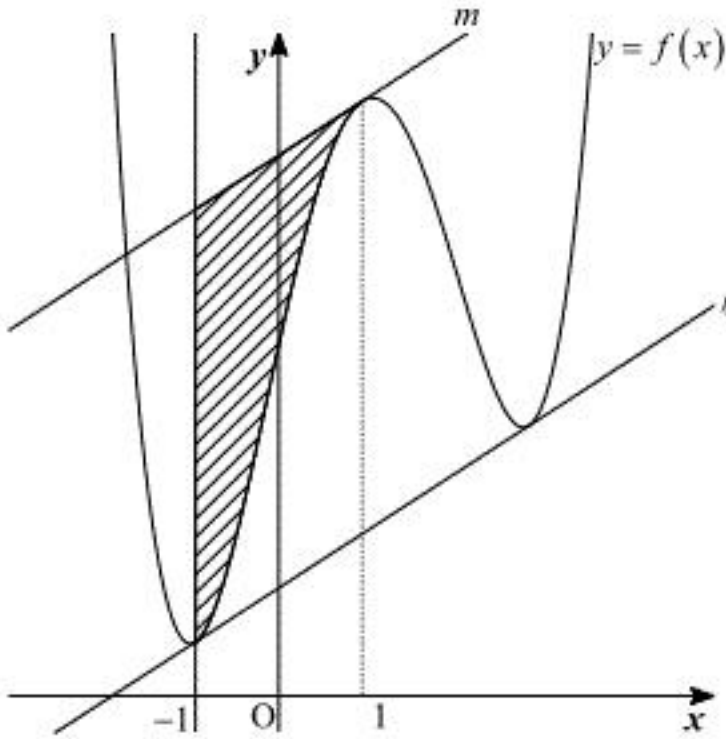
曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=2x+4$ の接点の x 座標は、2 つの式から y を消去すると

$$\begin{aligned}x^4-4x^3-2x^2+14x+13 &= 2x+4 \\ \Leftrightarrow x^4-4x^3-2x^2+12x+9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2(x-3)^2 &= 0 \\ \therefore x &= -1, 3\end{aligned}$$

となる。また、曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=2x+20$ の接点の x 座標は、上図より $x=1$ であるから、

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, 1, 3)$$

となる。以下に求める面積を斜線部で示す。



上図より、求める面積は

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \{(2x+20)-f(x)\} dx &= \int_{-1}^1 (-x^4+4x^3+2x^2-12x+7) dx \\ &= 2\int_0^1 (-x^4+2x^2+7) dx \\ &= 2\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+7x\right]_0^1 \\ &= 2\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+7\right) \\ &= \frac{224}{15}\end{aligned}$$

となる。