

【Ⅰ】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ
	3	0	7	9
(2)	オ	カ	キ	ク
	8	2	4	4

〔解説〕

(1)

$x < 7$ のとき、与えられた不等式 $-x^2 - x + 20 > \frac{140}{7-x}$ は、

$$\begin{aligned} (7-x)(-x^2-x+20) &> 140 \\ \Leftrightarrow x^3-6x^2-27x &> 0 \\ \Leftrightarrow (x+3)x(x-9) &> 0 \\ \Leftrightarrow -3 < x < 0, 9 < x \end{aligned}$$

となる。いま、 $x < 7$ のときを考えているから、

$$-3 < x < 0$$

となる。次に、 $x > 7$ のとき、与えられた不等式は、

$$\begin{aligned} (7-x)(-x^2-x+20) &< 140 \\ \Leftrightarrow (x+3)x(x-9) &< 0 \\ \Leftrightarrow x < -3, 0 < x < 9 \end{aligned}$$

となる。いま、 $x > 7$ のときを考えているから、

$$7 < x < 9$$

となる。以上より、求める範囲は、 $-3 < x < 0, 7 < x < 9$ となる。

(2)

$g(s) = q^s$ とおくと、 $g'(s) = q^s \log q$ である。微分係数の定義より、

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \frac{q^s - q}{s - 1} &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{g(s) - g(1)}{s - 1} \\ &= g'(1) \\ &= q \log q \end{aligned}$$

となる。次に関数 $f(x)$ について考える。 $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{q^s - q}{s - 1} = q \log q$ より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(x^{1+\frac{1}{n}} - x \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{1+\frac{1}{n}} - x}{\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1} \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{x^s - x}{s - 1} \\ &= x \log x \end{aligned}$$

が成り立ち、これは $x = 1$ で連続である。そのため、 $f(x)$ が $x = 1$ で連続であるためには、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax - 2b + x^{n+1} - cx^n}{4 + x^n} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

が収束し、かつ $x = 1$ で連続であることが必要十分条件である。 $0 < x < 1$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax - 2b + x^{n+1} - cx^n}{4 + x^n} = \frac{ax - 2b}{4}$$

であり、 $x = 1$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax - 2b + x^{n+1} - cx^n}{4 + x^n} = \frac{a - 2b + 1 - c}{5}$$

であり、 $1 < x$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax - 2b + x^{n+1} - cx^n}{4 + x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{x^{n-1}} - \frac{2b}{x^n} + x - c}{\frac{4}{x^n} + 1} = x - c$$

である。よって、 $\textcircled{1}$ は収束する。また、 $\textcircled{1}$ が $x = 1$ で連続であるための条件は、

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{ax - 2b}{4} = h(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x - c)$$

より

$$\frac{a - 2b}{4} = \frac{a - 2b + 1 - c}{5} = 1 - c$$

となる。 $\frac{a - 2b}{4} = 1 - c$ より

$$a - 2b + 4c = 4$$

となり、このとき $\frac{a - 2b + 1 - c}{5} = 1 - c$ を満たす。したがって $f(x)$ が $x = 1$ で連続であるとき、

$$a - 2b + 4c = 4$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ						
	0	3						
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	0	1	5	2	6	2	5	5

〔解説〕

(1)

(a)

題意より $\alpha=a+bi$ である。A が格子点であるとき、 a, b はともに整数である。このとき B は

$$\begin{aligned}\alpha+\alpha i&=a+bi+i(a+bi)\\&=(a-b)+(a+b)i\end{aligned}$$

で表される。 a, b はともに整数であるから、 $a-b, a+b$ もともに整数である。よって A が格子点であるとき、B は必ず格子点になる。

(b)

題意より、 $\alpha+\alpha i=a+bi$ である。このとき、

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{a+bi}{1+i}\\&=\frac{(a+bi)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\\&=\frac{a+b}{2}+\frac{-a+b}{2}i\\&=\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}i-ai\end{aligned}$$

となる。よって、A が格子点である条件は、 $a+b$ が偶数であることである。

(2)

ド・モアブルの定理より、 γ は

$$\begin{aligned}\gamma^5&=\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)^5\\&=\cos 2\pi+i\sin 2\pi\\&=1\end{aligned}$$

を満たすから、

$$\gamma^4+\gamma^3+\gamma^2+\gamma+1=\frac{\gamma^5-1}{\gamma-1}=0$$

となる。 $\gamma\neq 0$ であるから、等式 $\gamma^4+\gamma^3+\gamma^2+\gamma+1=0$ の両辺に γ^{-2} をかけて

$$\gamma^2+\gamma+1+\gamma^{-1}+\gamma^{-2}=0$$

を得る。ここで、 $t=\gamma+\gamma^{-1}$ とおくと、左辺は

$$\begin{aligned}\gamma^2+\gamma+1+\gamma^{-1}+\gamma^{-2}&=(\gamma^2+\gamma^{-2})+(\gamma+\gamma^{-1})+1\\&=\left\{(\gamma+\gamma^{-1})^2-2\gamma\gamma^{-1}\right\}+(\gamma+\gamma^{-1})+1\\&=(t^2-2)+t+1\\&=t^2+t-1\end{aligned}$$

となる。方程式 $t^2+t-1=0$ を解いて

$$t(=\gamma+\gamma^{-1})=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

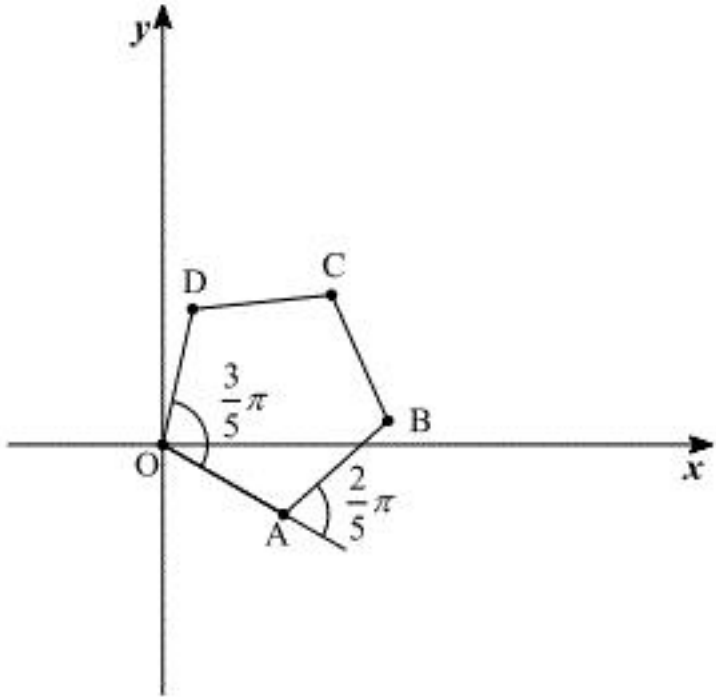
を得る。ここで

$$\begin{aligned}\gamma+\gamma^{-1}&=\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)+\left(\cos\frac{2}{5}\pi-i\sin\frac{2}{5}\pi\right)\\&=2\cos\frac{2}{5}\pi\end{aligned}$$

より、 $\gamma+\gamma^{-1}>0$ であるから、

$$\gamma+\gamma^{-1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

となる。



次に、 $O(0), A(\alpha), B(\alpha+\gamma\alpha), C(\alpha+\gamma\alpha+\gamma^2\alpha), D$ が正五角形をなすときの D を表す複素数を

求める。D(d)とおく。正5角形の1つの内角は $\frac{3}{5}\pi$ であるから、図より D は A を時計回りに

$\frac{3}{5}\pi$ 回転させた点である。よって、

$$\begin{aligned}d&=\alpha\left(\cos\frac{3}{5}\pi+i\sin\frac{3}{5}\pi\right)\\&=\alpha\left\{\cos\left(\pi-\frac{2}{5}\pi\right)+i\sin\left(\pi-\frac{2}{5}\pi\right)\right\}\\&=\alpha\left(-\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)\\&=-\alpha\left(\cos\frac{2}{5}\pi-i\sin\frac{2}{5}\pi\right)\\&=-\gamma^{-1}\alpha\end{aligned}$$

となる。以下、 α の実部を a 、虚部を b とする。このとき、

$$\begin{aligned}|\alpha+\gamma\alpha|^2&=|\alpha|^2|1+\gamma|^2\\&=(a^2+b^2)(1+\gamma)(1+\bar{\gamma})\\&=(a^2+b^2)(1+\gamma+\bar{\gamma}+\gamma\bar{\gamma})\\&=(a^2+b^2)(\gamma+\gamma^{-1}+2)\end{aligned}$$

である。ここで、 $\gamma+\gamma^{-1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ であるので、

$$|\alpha+\gamma\alpha|^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}(a^2+b^2)$$

となる。A が格子点のとき、 a, b はともに整数であるので、 $|\alpha+\gamma\alpha|^2=OB^2$ は無理数である。

したがって、A が格子点のとき B は格子点にはならない。また、 $OB^2=OC^2$ より、 OC^2 も無理数であるから、同様に C も格子点にはならない。

【Ⅲ】

〔解答〕

(1)	ア										
	0										
(2)	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	2	2	3	2	2	2	3	8	3	1	6

〔解説〕

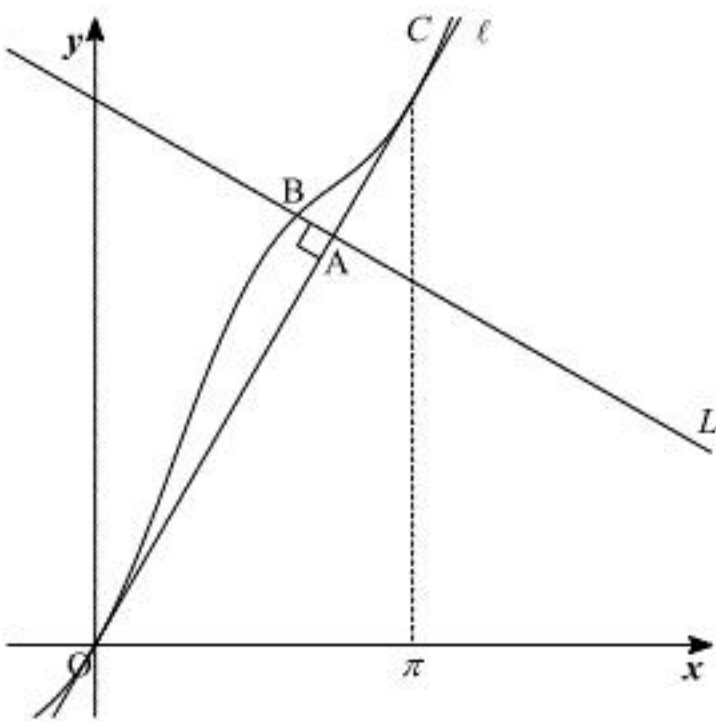
(1)

$(\sin x)' = \cos x$ であるから、 k が自然数のとき、

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^k x \cos x \, dx &= \int_0^\pi \sin^k x (\sin x)' \, dx \\ &= \left[\frac{1}{k+1} \sin^{k+1} x \right]_0^\pi \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

(2)



$\ell \perp L$ であり、点 A と点 B が直線 L 上の点であることから、点 A と点 B の距離 h は、点

$B(t, \sqrt{3}t + \sin^2 t)$ と直線 $\ell: \sqrt{3}x - y = 0$ との距離である。よって、

$$\begin{aligned}h &= \frac{\left| \sqrt{3}t - (\sqrt{3}t + \sin^2 t) \right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 t\end{aligned}$$

となる。また、 $h = AB \neq 0$ のとき、三角形 OAB は直角三角形であるから、 $OA^2 + AB^2 = OB^2$ が成り立つ。 $h = AB = 0$ のときもこれは成り立つから、

$$\begin{aligned}OA^2 &= OB^2 - AB^2 \\ &= \left\{ t^2 + (\sqrt{3}t + \sin^2 t)^2 \right\} - \left(\frac{1}{2} \sin^2 t \right)^2 \\ &= 4t^2 + 2\sqrt{3}t \sin^2 t + \frac{3}{4} \sin^4 t \\ &= \left(2t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 t \right)^2\end{aligned}$$

となる。点 A の x 座標が 0 以上であるとき、図より点 B の x 座標も 0 以上なので、 $t > 0$ である。よって、 p は、

$$p = OA = 2t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 t$$

となる。次に、 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で曲線 C と直線 ℓ で囲まれた図形を直線 ℓ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を考える。 $t = \pi$ のとき、 $p = 2\pi$ であるから、

$$V = \pi \int_0^{2\pi} h^2 \, dp$$

である。ここで、 $p = f(t)$ と置換すると、 $dp = (2 + \sqrt{3} \sin t \cos t) dt$ であり、積分区間の対応は以下の表の通りとなる。

p	0	$\rightarrow$	2π
t	0	$\rightarrow$	π

よって、

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^{2\pi} h^2 \, dp \\ &= \pi \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \sin^2 t \right)^2 (2 + \sqrt{3} \sin t \cos t) \, dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^4 t \, dt + \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \int_0^\pi \sin^5 t \cos t \, dt\end{aligned}$$

となる。ここで、(1) より $\int_0^\pi \sin^5 t \cos t \, dt = 0$ であるから、

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^4 t \, dt$$

となる。また、2 倍角の公式より

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^4 t \, dt &= \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \, dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 - 2 \cos 2t + \cos^2 2t) \, dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \left(1 - 2 \cos 2t + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4t}{2} \right) \, dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} t - \sin 2t + \frac{1}{8} \sin 4t \right]_0^\pi \\ &= \frac{3}{8} \pi\end{aligned}$$

であるから、求める体積は

$$\begin{aligned}V &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^4 t \, dt \\ &= \frac{3}{16} \pi^2\end{aligned}$$

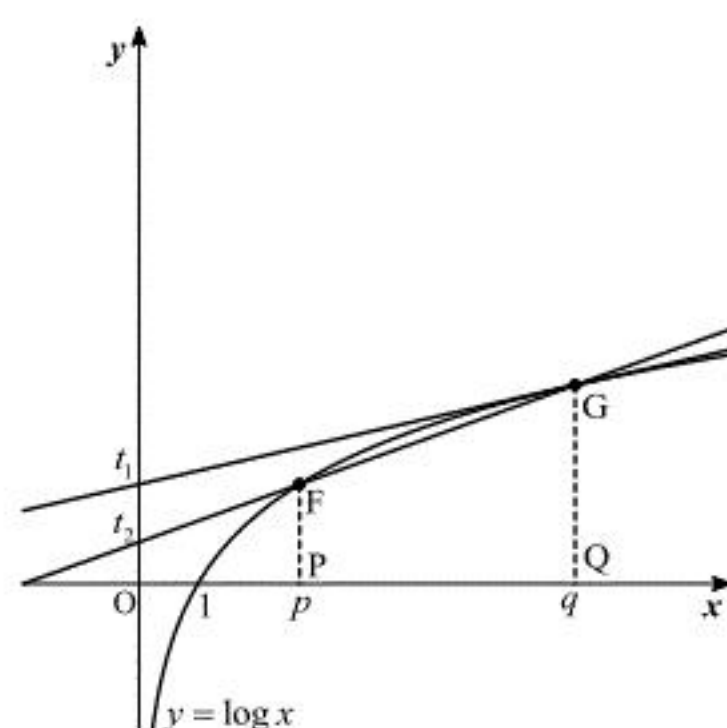
となる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
5	7	8	3	3	6	9	9	6	3

〔解説〕



$y = \log x$ のとき、 $y' = \frac{1}{x}$ であるから、点 G における曲線 C の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{q}(x - q) + \log q \\ &= \frac{1}{q}x + \log q - 1 \end{aligned}$$

となる。 t_1 はこの直線と y 軸の交点の y 座標であるから、

$$t_1 = \log q - 1$$

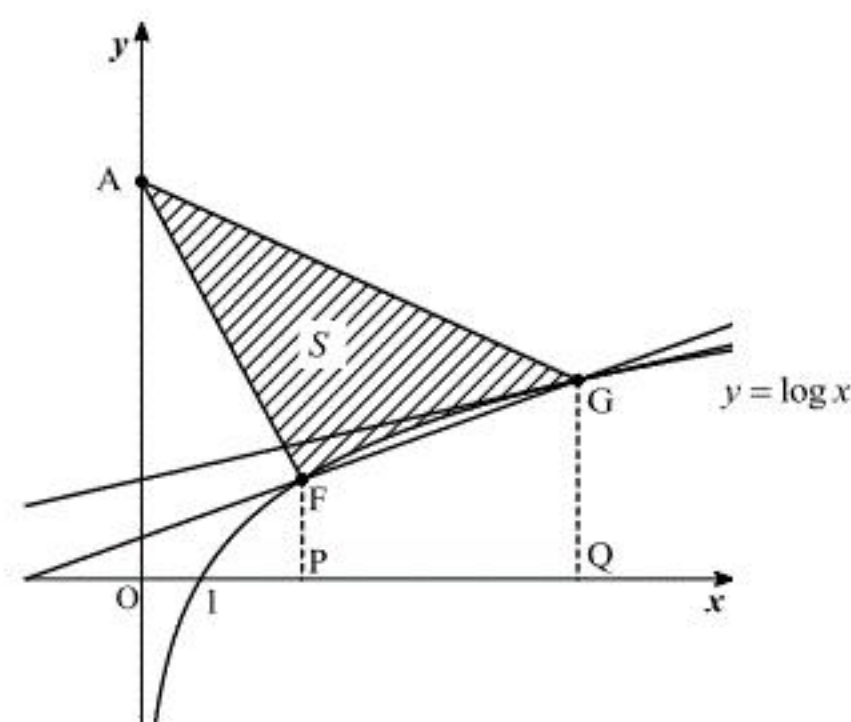
となる。また、直線 FG の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{\log q - \log p}{q - p}(x - p) + \log p \\ &= \frac{\log q - \log p}{q - p}x + \frac{-p \log q + p \log p + (q - p) \log p}{q - p} \\ &= \frac{\log q - \log p}{q - p}x + \frac{q \log p - p \log q}{q - p} \end{aligned}$$

となる。したがって、 t_2 は直線 FG と y 軸の交点の y 座標であるから、

$$t_2 = \frac{q \log p - p \log q}{q - p}$$

となる。



$t > t_1$ のとき、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}q(t + \log q) \\ V &= \frac{1}{2}p(t + \log p) \end{aligned}$$

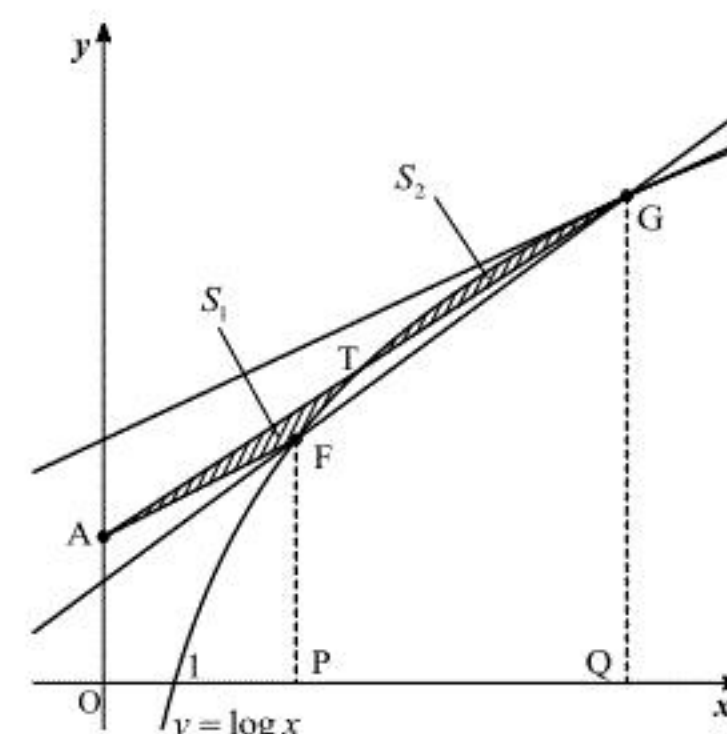
であり、

$$\begin{aligned} \int_p^q \log x \, dx &= \int_p^q (x)' \log x \, dx \\ &= [x \log x]_p^q + \int_p^q dx \\ &= q \log q - p \log p + [x]_p^q \\ &= q \log q - p \log p + q - p \end{aligned}$$

であるから、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= U - V - \int_p^q \log x \, dx \\ &= \frac{1}{2}q(t + \log q) - \frac{1}{2}p(t + \log p) - (q \log q - p \log p + q - p) \\ &= \frac{1}{2}\{(t + 2)(q - p) + p \log p - q \log q\} \end{aligned}$$

となる。



次に、 $t_2 < t < t_1$ のとき、図より

$$\begin{aligned} S_1 + V + \int_p^q \log x \, dx &= U + S_2 \\ \Leftrightarrow S_1 - S_2 &= U - V - \int_p^q \log x \, dx \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= U - V - \int_p^q \log x \, dx \\ &= \frac{1}{2}\{(t + 2)(q - p) + p \log p - q \log q\} \end{aligned}$$

となる。 $S_1 = S_2$ のとき、 $S_1 - S_2 = 0$ であるから、求める条件は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{(t + 2)(q - p) + p \log p - q \log q\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (t + 2)(q - p) &= q \log q - p \log p \\ \Leftrightarrow t &= \frac{q \log q - p \log p}{q - p} - 2 \end{aligned}$$

となる。